

Article : THEORIE MATHEMATIQUE PLATONISTE-THEORIE DES ENSEMBLES

Auteur :Thierry DELORT

INRIA-SACLAYS

Email :tdelort@yahoo.fr

Date :16 Décembre 2016

Résumé :

Dans cet article, nous présentons une théorie mathématique générale basée sur le Platonisme, appelée TMP (Théorie Mathématique Platoniste), et en particulier la partie de la TMP relative aux fondations des mathématiques et à la Théorie des ensembles. Cette Théorie des ensembles Platoniste, nous conduit à obtenir l'existence au sens Platonicien des concepts de bases en mathématiques, notamment l'ensemble des naturels, l'ensemble de réels, et aussi l'existence d'objets mathématiques identifiés à des corps, des anneaux ou des espaces vectoriels. La TMP est donc fondamentale car elle permet de donner une signification réelle (Platoniste) à l'ensemble des mathématiques, et donc propose une alternative aux théories mathématiques de logique actuelles basées sur le formalisme, qui est beaucoup plus intéressante que ces dernières.

Nous voyons aussi comment apparaissent naturellement dans toute théorie des ensembles Platoniste les paradoxes classiques (de Cantor ou de Russel) et nous exposons comment la TMP évite ces paradoxes.

A partir des bases de la théorie présentée dans cet article, il est possible de la développer pour obtenir une Théorie Mathématique Platoniste de l'ensemble des mathématiques, et en particulier une Théorie de Logique Platonicienne des propositions, ce qui sera fait dans un second article.

Mots clés :Platonisme -théorie des ensembles- Paradoxes de Cantor et de Russel- fondations des mathématiques.

1.INTRODUCTION

La plupart des mathématiciens ont l'idée d'une existence réelle des mathématiques, mais jusqu'à présent cette conception, le Platonisme, était purement philosophique, les théories mathématiques de logique actuelle étant basées sur le formalisme. Le présent article présente une théorie mathématique, et non philosophique, donnant une conception Platoniste des mathématiques. C'est-à-dire qu'elle donne une signification réelle, dans un Espace mathématique Platonique, aux concepts mathématiques classiques et aux théories mathématiques classiques.

Nous verrons donc dans cet article comment cette Théorie Mathématique Platoniste (TMP) permet de montrer l'existence au sens Platonique des concepts basiques classiques mathématiques (Ensemble des naturels, des réels, espaces vectoriels...).

Nous verrons que dans une théorie Platoniste apparaissent naturellement certains paradoxes analogues aux paradoxes classiques (de Cantor et de Russel) et comment ils sont évités par la TMP.

Nous verrons qu'il y a une profonde analogie entre la TMP et la théorie géométrique d'Euclide, notamment l'existence d'un espace dans lequel existe des objets mathématiques. Mais la TMP est beaucoup plus générale que la théorie d'Euclide, puisqu'elle peut interpréter l'ensemble des mathématiques modernes, permettant notamment de prouver l'existence de tous les concepts mathématiques utilisés dans les théories mathématiques classiques.

2.AXIOMES DE LA TMP

Le premier Axiome de la TMP est aussi le plus important. Il définit les propriétés principales d'un Espace Mathématique Platonique (EMP) et celles des objets mathématiques. Par « concept

primitif », on entend de façon usuelle « concept sans définition mathématique explicite, dont le sens est compris intuitivement, et dont on n'utilise que les propriétés intuitivement évidentes. On utilise dans l'Axiome 2.1 le concept primitif fondamental « existe dans ».

L' Axiome de base de la TMP est donc :

AXIOME 2.1 :

a) « x est tel que x est un objet mathématique » est équivalent à « x est tel que x existe dans l' Espace mathématique Platonique (EMP) ».

b) Il existe un et un seul objet mathématique x tel que x est l' Espace Mathématique Platonique.

On appellera aussi l'Axiome précédent « définition axiomatique partielle » car il est évident qu'il donne aussi une définition partielle de l'EMP, d'un objet mathématique et de la relation « existe dans ».

L'Espace Mathématique Platonique (EMP) est analogue à un Espace Euclidien, plan Euclidien ou Espace Euclidien de dimension 3. C'est pourquoi on utilise le terme d' « Espace » pour le désigner. Les objets mathématiques existent à l'intérieur de lui de façon analogue à la manière dont les figures géométriques (cercle, droite ,sphère...) existent à l'intérieur du plan ou de l'Espace Euclidien. Cependant, l' analogie n'est pas complète car on verra que l'EMP ne peut pas être considéré comme un ensemble contrairement à l'Espace Euclidien dans sa conception mathématique actuelle . C'est pourquoi on dira qu'un objet mathématique *existe dans l'EMP* et non qu'il *est un élément* de l'EMP. On définit alors les concepts fondamentaux de la TLP :

DEFINITION 2.2A :

Une *relation non-floue* est un objet mathématique R ayant les propriétés suivantes :

a) $O_{01}, \dots, O_{0n}$ étant des objets mathématiques quelconques, la relation R *entre* $O_{01}, \dots, O_{0n}$ est vraie ou n'est pas vraie. On dira qu'elle est *binaire*.

On montrera plus loin l'existence des naturels et de la séquence $(O_{01}, \dots, O_{0n})$, $O_{01}, \dots, O_{0n}$ étant des objets mathématiques existants. R ne peut être vraie que pour un naturel donné n, appelé *ordre de multiplicité* de la relation R.

Dans ce premier article, on ne considèrera que des relations d'ordre de multiplicité 2. R étant une relation d'ordre de multiplicité 2, on écrira en général $O_{10} R O_{20}$ à la place de $R(O_{10}, O_{20})$. Par exemple on écrira en accord avec la notation standard « a_0 est élément de A_0 » à la place de « est élément de (a_0, A_0) ».

b) La relation R entre $O_{01}, \dots, O_{0n}$ ne peut être à la fois vraie et non-vraie, on dira qu'elle est *cohérente* .

c) On dira qu'une relation non floue R telle que définie plus haut est un *objet mathématique relationnel*.

On dira que les termes définis précédemment « relation non floue », « relation binaire », « relation cohérente » sont des termes para-mathématique, et que la Définition précédente est donc une proposition meta-mathématique, qu'on peut aussi considérer comme une définition Axiomatique d'une relation non-floue d' « une relation entre des objets mathématiques » ou d' « un objet mathématique relationnel ». Par contre « l'EMP », « existe dans » et « d'un objet mathématique » défini par l'Axiome 2.1 précédent sont des termes purement mathématiques et l'Axiome 2.1 est aussi

purement mathématique car il emploie seulement des termes purement mathématiques. Nous donnerons plus loin une définition générale de termes purement mathématiques.

AXIOME 2.2B) :

a) « *appartient à* » est une relation non floue d'ordre de multiplicité 2.

b) Si A_0 est un ensemble et B_0 est un ensemble, et si « x est tel que x appartient à A_0 » est équivalent à « x est tel que x appartient à B_0 », alors A_0 est identique à B_0 .

c) Si A_0 est un ensemble et a_0 est tel que a_0 appartient à A_0 , alors on dira : a_0 est élément de A_0 .

L'Axiome précédent est une définition axiomatique partielle d'un ensemble, et des relations « appartient à » et « est élément de ». Elle est partielle car d'autres Axiomes complèteront ces définitions. Par exemple on verra que « est élément de » est une relation non floue. On verra que l'Axiome précédent est purement mathématique.

AXIOME 2.2C) :

a) Si C_0 est un couple, alors il existe un et un seul objet mathématique A_0 et il existe un et un seul objet mathématique B_0 tel que A_0 est le premier terme de C_0 et B_0 est le deuxième terme de C_0 .

b) Si A_0 est un objet mathématique différent de l'EMP et B_0 est un objet mathématique différent de l'EMP, alors il existe un et un seul objet mathématique C_0 tel que C_0 est un couple et A_0 est le premier terme de C_0 et B_0 est le deuxième terme de C_0 .

c) « *est le premier terme de* » et « *est le 2^{ième} terme de* » sont des relations non floues d'ordre de multiplicité 2.

d) Si x est tel que x est un couple, alors x n'est pas un ensemble.

Si C_0 est un couple et A_0 est le premier terme de C_0 et B_0 est le 2^{ième} terme de C_0 , on identifiera classiquement C_0 avec (A_0, B_0) .

Une conséquence immédiate de l'Axiome précédent est que si C_{01} est un couple et C_{02} est un couple et si le premier terme de C_{01} est identique au 1^{ier} terme de C_{02} et le 2^{ième} terme de C_{01} est identique au 2^{ième} terme de C_{02} alors C_{01} est identique à C_{02} .

L'Axiome précédent est la définition Axiomatique d'un couple et la définition partielle des relations « est le premier terme » et « est le deuxième terme de ». Notons que le c) est un Axiome meta-mathématique car il utilise le terme para-mathématique « relation non floue ».

AXIOME 2.2D) :

a) Il existe un et un seul objet mathématique σ tel que (σ est un ensemble et « Pour tout x tel que x est un objet mathématique, x n'est pas élément de σ »).

On dira que σ est l'ensemble vide et dans cet article, on le représentera toujours par le symbole σ .

b) Si A_0 est un ensemble et que A_0 n'est pas identique à l'ensemble vide, alors il existe un objet mathématique x tel que x est élément de A_0 .

c) Si x est tel que x est un objet mathématique relationnel, alors x n'est pas un ensemble et x n'est pas un couple.

L'Axiome précédent est la définition Axiomatique de l'ensemble vide et le b) est une définition axiomatique partielle (complétant les précédentes) d'un ensemble.

Un concept fondamental de la TMP est celui d'« entraîner ». « entraîner » est un concept primitif de la TMP, signifiant que si des relations entre des objets mathématiques sont vraies, alors les relations entre des objets mathématiques entraînées par les premières sont vraies. L'Axiome suivant est alors évident, il peut aussi être considéré comme la définition axiomatique du concept primitif « entraîner » :

AXIOME 2.2.E :

a) Les Axiomes et définitions de la TMP sont équivalentes à des relations non-floues entre des objets mathématiques sont vraies ou à des propositions meta-mathématiques vraies.

Dans le point a) « est équivalente » signifie « s'entraîne mutuellement avec ».

b) Des relations non-floues entre des objets mathématiques vraies et des propositions para-mathématiques vraies entraînent seulement des relations non-floues entre objets mathématiques vraies et des propositions méta-mathématiques vraies.

c) Des relations non-floues entre des objets mathématiques vraies et des propositions para-mathématiques vraies ne peuvent entraîner qu'une relation binaire n'est pas binaire, ou qu'une relation cohérente n'est pas cohérente.

L'Axiome précédent définit partiellement les concepts « entraîner », « des relations entre des objets mathématiques » et « proposition meta-mathématique vraie ». Même si ces définitions sont partielles, elle suffiront pour ce premier article exposant la TMP. Nous donnerons dans le 2^{ème} article une définition complète de « des relations entre des objets mathématiques qui existent ».

Les propositions meta-mathématiques vraies de la TMP sont celles utilisant des termes para-mathématiques comme « relation non-floue », « définition », « des relations entre des objets mathématiques qui existent (ou qui n'existent pas) ». En particulier l'Axiome précédent est donc une proposition mathématique para-mathématique vraie.

Le c) de l'Axiome précédent est la conséquence immédiate du b), car si R est une relation non-floue, alors « R est binaire » et « R est cohérente » sont des relations para-mathématiques vraies.

AXIOME 2.2 F :

a) Si D(o) est une définition et O_0 est un objet mathématique, on dira que $D(O_0)$ est vraie si $D(O_0)$ est équivalente à des relations non floues entre O_0 et d'autres objets mathématiques qui sont vraies.

b) Une proposition purement mathématique n'emploie que certains termes appelés *termes purement mathématiques* et n'emploie pas de termes appelés *termes para-mathématiques*.

c) Une proposition P purement mathématique est vraie si elle est équivalente à des relations non floues entre des objets mathématiques qui sont.

d) Une proposition meta-mathématique emploie des termes mathématiques mais aussi certains termes appelés termes para-mathématiques.

Dans la proposition précédente « est équivalente » signifie « s'entraîne mutuellement avec ». L'Axiome précédent définit partiellement « une proposition purement mathématique » et « une proposition meta-mathématique ». Nous définirons plus loin complètement les termes purement mathématiques et les termes para-mathématiques dont on a vu des exemples plus haut. Par exemple

« un ensemble » est un terme purement mathématique mais « une relation floue » ou « des relations entre des objets mathématiques qui existent » sont des termes par-mathématiques. L'Axiome précédent est donc un Axiome para-mathématique.

Par conséquent des propositions vraies purement mathématiques et des propositions para-mathématiques vraies entraînent seulement des propositions purement mathématiques vraies à cause de l'Axiome 2.2.E.

Par exemple si P1 est la proposition purement mathématique « A est un ensemble et A n'est pas identique à l'ensemble vide », alors il est évident que P1 et les propositions (vraies) de la TMP entraînent P2 : « Il existe x tel que x est élément de A ». Et donc d'après les Axiomes précédents P2 est une proposition purement mathématique équivalente à des relations entre des objets mathématiques qui sont vraies et donc P2 est une proposition vraie.

Dans le 2^{ème} article de la TMP, on montrera comment expliciter les relations entre des objets mathématiques vraies équivalentes à une proposition purement mathématique vraie quelconque, en accord avec les Axiomes précédents. Cependant, dans cet article comme en général, pour justifier qu'une proposition purement mathématique est vraie, on n'explicitera pas les relations non floues entre des objets vraies auxquelles cette proposition est équivalente, mais en appliquant l'Axiome 2.2.E. et en la déduisant des Axiomes de la TMP.

Nous avons défini plus haut des relations non-floues. On peut généraliser cette définition afin de définir des *définitions non-floues* et des *concepts non-flous*.

DEFINITION 2.3 :

a) On dira qu'un objet mathématique O_0 existant dans l'EMP *correspond à la définition* $D(o)$, si on a « $D(O_0)$ est vraie ».

b) On dira qu'un objet mathématique O_0 existant dans l'EMP *ne correspond pas à la définition* $D(o)$, si on a $\text{Non}(\text{« } D(O_0) \text{ est vraie »})$.

c) On dira que la définition $D(o)$ est *binaire* si pour tout objet mathématique existant O_0 , on a ou bien « $D(O_0)$ est vraie » ou bien $\text{Non}(\text{« } D(O_0) \text{ est vraie »})$.

d) On dira que la définition $D(o)$ est *cohérente* si pour aucun objet existant O_0 on a « $D(O_0)$ est vraie » et $\text{Non}(\text{« } D(O_0) \text{ est vraie »})$.

On dira que $D(o)$ est *non-floue* si elle est binaire et cohérente.

e) On appellera *concept non-flou* un caractère ou une chaîne de caractères C_c telle que :

(i) C_c ne peut représenter d'objets mathématiques relationnels.

(ii) Pour tout objet mathématique O_0 , ou bien C_c peut représenter O_0 , ou bien C_c ne peut pas représenter O_0 . C_c ne peut représenter d'objets mathématiques relationnels.

(iii) Pour tout objet mathématique O_0 , on ne peut avoir C_c peut représenter O_0 et C_c ne peut pas représenter O_0 .

(iii) C_c représente au moins un objet mathématique.

f) Si on a une définition non-floue $D(o)$, et si O est défini comme étant un symbole pouvant représenter certains objets mathématiques tel qu'on ait :

(i) O ne peut représenter d'objets mathématiques relationnels.

(i) « O_0 est un objet mathématique (non relationnel) correspondant à $D(o)$ » est équivalent à « O peut représenter O_0 ».

(ii) « O_0 est un objet mathématique ne correspondant pas à $D(o)$ » est équivalent à « O ne peut pas représenter O_0 ».

(L'équivalence signifiant que les propositions s'entraînent mutuellement.)

(iii) Il existe au moins un objet mathématique (non relationnel) pouvant être représenté par O .

Puisque $D(o)$ est non-flou, O est donc un concept non-flou.

On dira que O est un *concept non-flou associé* à $D(o)$.

(Si on a seulement (i) et (ii), on dira que O est un *symbole non-flou associé* à $D(o)$).

g) On distinguera alors 2 sortes de concepts non-flou :

Soit O un concept non-flou (défini en e). On distingue 2 sortes de concepts non-flous *exclusifs*, les *concepts non-flous particuliers* et les *concepts non-flous généraux* :

On distingue 2 cas :

- Si O peut représenter au moins 2 objets mathématiques :

O est un *concept particulier* signifie qu'on peut considérer pour tout objet O_0 pouvant être représenté par O le cas où il O représente seulement O_0 . Alors partout où O est utilisé, O représente O_0 .

On remarque que si O est un concept particulier non-flou il ne peut jamais représenter simultanément plus d'un objet.

Par exemple, dans la proposition « Soit x tel que $D(x)$ », alors x sera un concept particulier non flou associé à $D(o)$.

O est un *concept général* signifie que O représente simultanément tous les objets qu'il peut représenter. De plus il peut représenter les mêmes objets quels que soient les cas de représentations des concepts particuliers définis avant lui, ce qui n'est pas le cas en général pour les concepts particuliers.

On remarque que contrairement à un concept particulier, il n'y a pas de cas où il représente un objet O_0 parmi ceux qu'il peut représenter, sauf s'il ne peut représenter qu'un seul objet.

Par exemple on verra qu'« un ensemble », « un objet mathématique » sont des concepts généraux non-flous représentant plus de 2 objets.

Dans le 1^{er} cas O représente au moins 2 objets :

O est un *concept particulier non-flou* signifie que si dans le texte utilisant O , on considère que O représente un objet particulier O_0 , alors partout dans le texte O représente le même O_0 . (« particulier » concept primitif de la TMP).

- Si O peut représenter un seul objet mathématique :

On devra aussi toujours préciser si O est un concept particulier ou général.

Dans une expression comme « Soit x tel que $D(x)$ » ou « Pour tout x tel que $D(x)$ » ou « Il existe x tel que $D(x)$ », alors x sera un concept particulier.

Par compte si O représente le même objet dans tout le texte considéré, alors O sera un concept général.

Par exemple $\mathbf{R}, \mathbf{N}, \mathbf{Z}$, et la multiplication dans $\mathbf{N}$, ou le nombre 123 seront des concepts généraux représentant chacun un unique objet.

On définit de façon analogue des *symboles particuliers*.

h) On dira qu'un objet a_0 appartient à un concept général non-flou O si a_0 peut être représenté par le concept non-flou O .

On dira qu'un concept non-flou O_1 (général) est inclus dans un concept O_2 (général) si tout objet pouvant être représenté par O_1 appartient à O_2 .

REMARQUE 2.4 :

a) Il est fondamental de distinguer un objet mathématique O_0 , O_0 étant identifié à un objet mathématique, d'un concept non flou O qui lui est un symbole pouvant représenter certains objets mathématique. Pour éviter la confusion, on mettra l'indice « 0 » lorsqu'on désignera un objet mathématique. Cependant, si un concept général peut représenter un seul objet, alors on identifiera ce concept avec l'objet unique qu'il représente, sans mettre l'indice « 0 » (Par exemple $N, Z...$)

b) On a vu précédemment que d'après sa définition, un concept non-flou ne peut représenter d'objets mathématiques relationnels. On pourrait cependant généraliser ce qui précède en définissant des concepts non-flous relationnels, généraux ou particuliers, pouvant représenter seulement des objets mathématiques relationnels c'est-à-dire des relations non-floues telles qu'on les a définies. Cependant, on n'utilisera pas de tels concepts non-flous relationnels dans cet article. Par exemple « une relation réflexive » ou « une relation transitive » pourraient être identifiés à des concepts généraux non-flous représentant des relations non-floues d'ordre de multiplicité 2.

Nous recherchons maintenant un Axiome permettant d'obtenir qu'une définition $D(o)$ est non-floue. Tout d'abord on remarque que les concepts mathématiques fondamentaux introduits dans la TLP (« un objet mathématique » qui peut représenter tout objet mathématique, l'EMP qui représente un unique objet, « un ensemble ») apparaissent intuitivement comme des concepts généraux non-flous. L'Axiome le plus simple permettant d'obtenir qu'une définition $D(o)$ est non-floue serait celui qui admet que si une définition $D(o)$ pour définir o utilise seulement des concepts non-flous, généraux ou particuliers, et des concepts primitifs classiques (« est identique à », « pour tout », « Il existe (un et un seul) », « si », « alors », « ou », « et », « non » ..) alors $D(o)$ est non-floue. C'est cet Axiome que nous admettrons :

AXIOME 2.5 :

a) Les concepts « un ensemble » (Défini partiellement dans l'Axiome 2.2B), « l'EMP », « un objet mathématique », « un objet mathématique relationnel », « l'ensemble vide », « un couple » sont des concepts généraux non-flous, et « est élément de », « est le 1^{er} (ou le 2^{ième}) terme de », « est identique à » sont des relations non-floues.

b) Si une définition $D(o)$ utilise pour définir o seulement o , des concepts non-flous (généraux ou particuliers) *prédéfinis* (C'est-à-dire définis avant $D(o)$), des relations non-floues, des *concepts primitifs relationnels* ayant leur signification usuelle parmi : « pour tout (objet mathématique)(suivi d'un nouveau symbole) », « Il existe (un et un seul) (suivi d'un nouveau symbole) », « est (un concept général) », « tel que », « Non », « et », « ou », « (», « , », «) », « , », « si, ..., alors », « est équivalent à » et des *nouveaux symboles définis dans* $D(o)$ (utilisant des définitions auxiliaires $D_{aux}(o_c)$ ou $D_{aux}(o_c, o)$) alors $D(o)$ est une définition non-floue. Si $C(o)$ est un symbole associé à une définition auxiliaire $D_{aux}(o_c, o)$ dans une définition non-floue $D(o)$ et que pour un objet O_0 , $C(O_0)$ n'est pas un concept non-flou, alors par définition on aura « $D(O_0)$ n'est pas vraie ».

Cet Axiome 2.5 est fondamental car il permet d'obtenir qu'une définition $D(o)$ est non floue sans avoir à expliciter les relations entre objets mathématiques auxquelles cette définition est équivalente. Dans le 2^{ième} article de la TMP, nous montrerons comment expliciter ces relations, si elles existent.

REMARQUE 2.5A :

a) On adoptera naturellement les significations précédentes pour les propositions contenant les concepts primitifs « Il existe » et « pour tout » :

« Pour tout C tel que $D(C)$, $P(C)$ » signifie que $D(o)$ est non-floue, qu'au moins un objet correspond à $D(o)$ et que pour tout objet C_0 tel que $D(C_0)$ soit vraie, $P(C_0)$ est vraie.

« Il existe C tel que $D(C)$ » signifie que $D(o)$ est non-floue et qu'au moins un objet C_0 correspond à $D(o)$. Alors C peut représenter tous les C_0 tel que $D(C_0)$ soit vraie.

On remarque que, A étant un concept particulier non-flou représentant des ensembles, si on a « Il existe C élément de A tel que $P(C)$ », C n'est pas le concept particulier non-flou associé à $D_1(o)$: « o est élément de A », mais est associé à $D_2(o)$: « o est élément de A et $P(o)$ ».

b) Il est évident qu'on pourrait réduire dans l'Axiome 2.5 le nombre de concepts primitifs relationnels non flous puisque certains peuvent toujours s'exprimer en fonction d'autres.

c) Il peut exister des relations non floue d'ordre de multiplicité 1. Par exemple $R(x)$: « x est un ensemble » est une relation d'ordre de multiplicité 1. On dira qu'elle est une relation intrinsèque de x . Le fait que « un ensemble » soit un concept non-flou entraîne que R est une relation non-floue.

REMARQUE 2.5B :

a) Dans une définition non-floue d'après l'Axiome 2.5, on peut donc utiliser des concepts généraux non-flous (Par exemple comme on le verra N , Q ...).

b) On peut aussi dans une définition non-floue utiliser les symboles usuels « (,) » pour représenter un couple qui est un concept général non-flou d'après l'Axiome 2.5.

c) D'après l'Axiome 2.5, on peut aussi utiliser dans une définition $D(o)$ non-floue des symboles $C(o)$, associés à des définitions $D(o_c)$ utilisant o et des concepts non-flous pour définir o_c . Ainsi par exemple si a est un concept non-flou, on peut utiliser « $C(o, a)$ », symbole associé à $D(o_c)$: « o_c est un couple et o est le premier terme de o_c et a est le 2^{ème} terme de o_c » dans une définition non-floue $D(o)$. On représentera alors $C(o, a)$ par (o, a) .

d) Il peut exister différents concepts particuliers associés à la même définition. Pour cela il suffit d'utiliser des symboles différents. Par exemple si O_1 et O_2 sont associés à la même définition $D(o)$, O_1 et O_2 peuvent représenter chacun d'eux un objet correspondant à $D(o)$, mais ne représentent pas nécessairement le même simultanément.

e) Si $D_1(o)$ et $D_2(o)$ sont des définitions équivalentes et si $D_1(o)$ est non-floue, on considérera évidemment que $D_2(o)$ est non-floue.

f) On a vu que les notions de « concept particulier non-flou » et de « concept général non-flou » étaient exclusives, et qu'il était donc nécessaire définir le genre de concept qu'on utilise.

Si on a une chaîne de caractère (pouvant inclure le caractère « blanc » C_1 ne contenant aucun concept particulier, alors C_1 précédé d'un article (par exemple « un C_1 », « le C_1 »...) ne pourra représenter qu'un concept général. (Par exemple « un ensemble », « un couple »...).

Par contre, dans les expressions, « Soit x tel que $D(x)$ », « Pour tout x tel que $D(x)$ », « Il existe x tel que $D(x)$ », « x est tel que $D(x)$ » x ne peut être qu'un concept particulier associé à la définition $D(o)$.

g) D'après la définition d'un concept général celui-ci peut représenter les mêmes objets quels que soient les objets représentés par les concepts particuliers définis avant lui. Et donc si on définit un concept général associé à une définition $D(o)$, on n'utilisera pas dans $D(o)$ des concepts particuliers pré-définis. On appellera *définition générale* une telle définition.

Si $D(o)$ est une définition générale et C_1 une chaîne de caractères ne contenant pas de concepts particuliers, l'expression « Si x est tel que $D(x)$, on dira que x est un C_1 » sera équivalente à « « un C_1 » est le concept général non-flou associé à $D(o)$ ».

h) On remarque que pour définir « un ensemble » ou « un couple » on n'a pas utilisé de définition $D(o)$ associée à ces concepts mais des axiomes. Ceci est très rare, mais est le cas pour les fondements de la TMP. On a appelé *Définition axiomatique* (partielle) de telles définitions sous forme d'Axiomes.

i) Un *Axiome* est une proposition qu'on admet à cause de son caractère d'évidence, et qui permet d'obtenir des propositions vraies appliquant l'Axiome 2.2.E.

On a vu qu'on distinguait 2 sortes d'Axiomes, les *Axiomes purement mathématiques* et les *Axiomes para-mathématiques* :

Les *Axiomes purement mathématiques* peuvent utiliser les mêmes termes qu'une définition non-floue donnés dans l'Axiome 2.5 à l'exception des concepts particuliers non-flous pré-définis, et s'ils sont des définitions axiomatiques partielles, ils peuvent utiliser les concepts généraux qu'ils définissent. Ils peuvent aussi utiliser, comme on l'a vu, des symboles identifiés à des objets mathématiques, notés avec l'indice « 0 ».

Les *Axiomes para-mathématiques* sont aussi des propositions dont on a admis la validité, mais ils utilisent aussi des termes para-mathématiques qu'on a défini et qui sont différents des termes qu'on peut utiliser dans des définitions non-floues. Ces termes para-mathématiques sont finis (contrairement aux autres car il existe à priori un nombre illimité de concepts généraux possibles), et ils sont : « une relation non floue », « un concept non flou », « une définition non-floue », « des relations entre des objets mathématiques qui existent (ou qui n'existent pas) », « une proposition vraie », « définitions récursives Platonistes » (dont on donnera plus loin la définition.

j) On montrera l'existence d'un objet mathématique identifié à N et donc, $O_{10}, \dots, O_{n0}$ étant des objets mathématiques, de la séquence $(O_{10}, \dots, O_{n0})$ identifiée avec $\{(1, O_{10}), \dots, (n, O_{n0})\}$.

Utilisant ce concept, on pourra définir un concept $(O_1, \dots, O_n)$ associé à une définition non-floue $D(o_1, \dots, o_n)$ de façon totalement analogue à un concept O associé à une définition non-floue $D(o)$.

Alors $(O_1, \dots, O_n)$ pourra représenter toutes les séquences d'objets mathématiques $(O_{10}, \dots, O_{n0})$ telles que $D(O_{10}, \dots, O_{n0})$ soient vraies. On dira alors que $O_1, \dots, O_n$ représentent simultanément $O_{10}, \dots, O_{n0}$.

Dans cet article, on utilisera seulement comme concepts généraux les concepts généraux propres à la TLP (EMP, objet mathématique,), et les concepts généraux classiques « ensembles », « ensemble vide », $N, Q..$ (dont on montrera l'existence).

REMARQUE 2.5C :

a) Un cas particulier est le cas où $D(o)$ emploie un symbole n'ayant aucun sens par exemple « XYZ », n'étant défini ni avant $D(o)$ ni dans $D(o)$. D'après l'Axiome 2.5, $D(o)$ peut néanmoins être non-floue. Cependant, elle ne sera jamais équivalente à des relations entre des objets mathématiques, et donc aucun objet O_0 ne correspondra à $D(o)$. Si par exemple $D(o)$ emploie l'expression « a est tel que est élément de o », alors si O_0 n'est pas un ensemble il est impossible que O_0 corresponde à la définition $D(o)$ car d'après la Définition 2.2.B. si on a « a_0 élément de O_0 », a_0 étant n'importe quel objet mathématique, cela entraîne que O_0 est un ensemble. On voit donc que même si $D(o)$ est non-floue d'après l'Axiome 2.5, elle peut n'avoir aucun sens, par exemple « o élément élément ». Alors, tout en étant non-floue, aucun objet existant ne correspond à $D(o)$ et donc il n'existe pas de concept associé à $D(o)$.

b) On remarque que d'après l'Axiome 2.5, les définitions $D_C(o)$: « o est un ensemble » et $D_R(o)$: « o est un ensemble et Non(o est élément de o) » sont des définitions non-floues. Elles seront utilisées pour étudier dans la TMP les paradoxes de Cantor et de Russel.

Supposons qu'on considère des objets mathématiques correspondant à une définition $D(o)$. On cherche à savoir s'il existe un ensemble A , concept non-flou dont les éléments correspondent à la définition $D(o)$. On a la définition suivante d'un tel ensemble :

DEFINITION 2.6 :

$D(o)$ on dira qu' A_0 est un ensemble dont les éléments correspondent à $D(o)$ si:

« O_0 correspond à $D(o)$ » est équivalent à « O_0 est élément de A_0 »

Il est clair que la définition précédente équivaut à :

« A est tel que $D_A(A)$: « A est un ensemble et a est tel que a est élément de A est équivalent à a est tel que $D(a)$ ».

La définition précédente $D_A(o)$ est non-floue d'après l'Axiome 2.5. De plus, elle est purement mathématique contrairement à la Définition 2.6 qui est para-mathématique car elle utilise « correspond à » .

REMARQUE 2.7 :

a) Dans la définition précédente, le concept primitif « est équivalent » signifie que si $D_1(O_0)$ est équivalente à $D_2(O_0)$, alors $D_1(O_0)$ entraîne $D_2(O_0)$ et $D_2(O_0)$ entraîne $D_1(O_0)$.

b) On remarque que d'après l'Axiome 2.2.B, si 2 ensembles ont les mêmes éléments ils sont identiques. Il en résulte que si A est un ensemble dont les éléments correspondent à une définition $D(o)$ alors A représente un unique ensemble.

c) On considèrera que l'expression « A_0 est l'ensemble dont les éléments correspondent à $D(o)$ » est équivalente à l'expression « $A_0 = \{a \text{ tel que } D(a)\}$ »

Si on considère des objets mathématiques correspondant à une définition $D(o)$ non-floue, c'est-à-dire binaire et cohérente, on pourrait s'attendre à ce qu'il existe un ensemble dont les éléments correspondent à $D(o)$. Ceci équivaldrait à admettre l'Axiome suivant, que nous appellerons « Axiome Naïf » :

AXIOME NAÏF 2.8:

Si on considère des objets mathématiques correspondant à une définition $D(o)$ non-floue, alors il existe un ensemble dont les éléments correspondent à la définition $D(o)$.

Or cet Axiome est faux. On l'a appelé « Axiome Naïf » car il conduit aux mêmes paradoxes que la Théorie naïve des ensembles.

Montrons comment on obtient un paradoxe analogue au Paradoxe de Cantor à partir de l'Axiome naïf 2.8 :

Supposons qu'on considère les objets mathématiques correspondant à la définition $D_C(o)$ « o est un ensemble ». On a vu que d'après l'Axiome 2.5, $D_C(o)$ est non-floue c'est à dire $D_C(o)$ est binaire et cohérente. Cependant si l'Axiome naïf 2.8 est vrai, alors il existe un ensemble non-flou A_C dont les éléments correspondent à $D_C(o)$, alors admettant que tout sous-ensemble de A_C est un ensemble existant (Ce qui est obligatoire si le concept « ensemble » a les propriétés des ensembles classiques), A_C admet comme élément chacun de ses sous-ensembles, et ceci est impossible car on est dans un cas analogue au Paradoxe de Cantor. On obtient aussi le paradoxe de Cantor dans la TLP, car dans cette théorie, et comme on le voit dans la Définition 2.2A) d'un ensemble, les ensembles ont les mêmes propriétés que les ensembles dans la théorie classique. Rappelons cependant comment on l'obtient.

On suppose donc l'existence du concept particulier non-flou A_C . On remarque que d'après la Remarque 2.7.b), A_C représente un unique ensemble.

On considère alors la définition d'un sous-ensemble de A $D_B(B)$ « B est tel que B est un ensemble et si x est tel que x est élément de B alors x est élément de A . ». Si l'Axiome naïf est vrai, il existe un ensemble non-flou $P(A_C)$ (représentant un unique ensemble) dont les éléments correspondent à $D_B(o)$. On a de plus $P(A_C)$ est inclus dans A_C puisque les éléments de $P(A_C)$ sont des ensembles.

Pour tout s_0 appartenant à $P(A_C)$, on définit l'objet mathématique $f(s_0)$ par $f(s_0)=s_0$. Donc $f(s_0)$ existe nécessairement. On dira classiquement qu'on a défini une fonction f , la fonction « identité ».

On considère alors l'ensemble $S=\{s_0/ s_0 \text{ est élément de } P(A_C) \text{ et } s_0 \text{ n'est pas élément de } s_0\}$. S est un ensemble non-flou représentant un unique ensemble si l'Axiome naïf est vrai.

De plus il est évident que S est inclus dans A , et donc S est un élément de $P(A)$.

On a $f(S)=S$. Si S n'est pas élément de S , S est élément de S , ce qui est impossible puisque S étant un concept non-flou, la définition « o est élément de S » est cohérente. De même il est impossible que S n'est pas élément de S . On obtient donc que la relation «est élément de » n'est pas binaire, ce qui d'après l'Axiome 2.2.E. signifie que l'Axiome naïf n'est pas une proposition méta-mathématique vraie, en supposant que les autres Axiomes de la TMP sont vrais.

(On sait plus généralement qu'il ne peut exister une injection f de $P(A)$ dans un ensemble A , considérant l'ensemble $S=\{s/ s \text{ est élément de } A, s \text{ a un antécédent par } f \text{ et } s \text{ n'est pas élément de } f^{-1}(s)\}$, on obtient que S ne peut avoir d'image par f .)

On remarque qu'il n'est pas nécessaire d'utiliser l'Axiome naïf pour obtenir l'existence de S et de $P(A_C)$, en supposant l'existence de A_C . Il suffit d'utiliser la théorie des ensembles classiques, et on verra que dans la TLP, ils existent aussi si A_C existe. On obtient donc un paradoxe analogue au Paradoxe de Cantor en utilisant l'Axiome naïf seulement pour obtenir l'existence de A_C .

Montrons comment on obtient un paradoxe analogue au Paradoxe de Russel :

Considérons les objets correspondants à la Définition $D_R(o)$ « o est un ensemble et $\text{Non}(\langle o \text{ est un élément de } o \rangle)$ ». On a vu que $D_R(o)$ était non-floue d'après l'Axiome 2.5 c'est à dire $D_R(o)$ est binaire et cohérente. Supposons que l'Axiome naïf 2.8 soit vrai. Alors il existe un ensemble A_R non-flou dont les éléments correspondent à $D_R(o)$.

A_R ne peut représenter qu'un unique ensemble d'après la Remarque 2.7.b).

Si « A_R est élément de A_R » est vraie, alors A_R ne correspond pas à $D_R(o)$, et donc A_R n'est pas élément de A_R , il est donc impossible qu'on ait « A_R est élément de A_R » est vraie puisque la relation « est élément de A_R » est cohérente.

Si on a $\text{Non}(\langle A_R \text{ est élément de } A_R \rangle \text{ est vraie})$, alors A_R correspond à $D_R(o)$ et donc « A_R est élément de A_R », ce qui est impossible puisque la définition « o est élément de A_R » est cohérente. Il est donc impossible qu'on ait $\text{Non}(\langle A_R \text{ est élément de } A_R \rangle \text{ est vraie})$.

Or ceci est impossible puisque la relation « est élément de » est binaire, et donc on a ou bien « A_R est élément de A_R » est vraie, ou bien $\text{Non}(\langle A_R \text{ est élément de } A_R \rangle \text{ est vraie})$.

On recherche donc un Axiome de la TLP permettant d'obtenir l'existence d'un ensemble non-flou A dont les éléments correspondent à une définition $D(o)$. On remarque que d'après l'Axiome 2.2C, A ne peut représenter qu'un unique ensemble.

Il est clair qu'une condition nécessaire est que $D(o)$ soit binaire et cohérente.

En effet, si $D(o)$ n'est pas binaire, alors pour un objet O existant, on a ni « $D(O)$ est vrai » ni $\text{Non}(\langle D(O) \text{ est vraie } \rangle)$. Il en résulte, d'après la Définition 2.6, qu'on ne peut pas avoir « O est élément de A » (Sinon on a « $D(O)$ est vraie », ni $\text{Non}(\langle O \text{ est élément de } A \rangle)$ (Sinon on a $\text{Non}(\langle D(O) \text{ est vraie } \rangle)$). Or ceci est impossible puisque la définition $D_A(o)$: « o est élément de A » est non-floue d'après l'Axiome 2.5 puisqu'on a supposé A concept non-flou.

Si $D(o)$ n'est pas cohérente, il existe un objet O tel qu'on ait « $D(O)$ est vraie » et $\text{Non}(\langle D(O) \text{ est vraie } \rangle)$. D'après la Définition 2.6 et la Remarque 2.7, ceci entraîne « O est élément de A » et $\text{Non}(\langle O \text{ est élément de } A \rangle)$. Or ceci est impossible puisque la Définition $D_A(o)$: « o est élément de A » est cohérente d'après l'Axiome 2.5.

Ainsi pour que A ensemble non-flou existe, il est nécessaire que $D(o)$ soit non-floue.

Supposons que $D(o)$ soit non-floue, et que tout objet correspondant à $D(o)$ soit élément d'un ensemble non-flou E . Puisque $D(o)$ est binaire et cohérente, il semble intuitivement certain qu'il existe un sous-ensemble de E dont les éléments correspondent à $D(o)$, ce qu'on admettra axiomatiquement. On introduit donc la définition suivante :

DEFINITION 2.10 :

Si on a une définition $D(o)$ telle que tout objet O_0 correspondant à $D(o)$ soit élément d'un ensemble A_0 (Qui doit être le même pour tout objet O_0 correspondant à $D(o)$), alors on dira que $D(o)$ est *basique*.

La définition précédente est para-mathématique. (Voir la Remarque 2.5.B).

Il sera aussi utile d'introduire dans la TLP les notions suivantes. Jusqu'ici, on a seulement étudié les cas d'une définition $D(o)$ n'utilisant pas de concepts particuliers, et on n'a pas étudié le cas où une définition $D(o)$ utilisait pour définir o des concepts particuliers $O_1, \dots, O_n$. On notera alors $D(o, O_1, \dots, O_n)$ une telle définition, et on donne les définitions suivantes, généralisant les définitions pour $D(o)$:

DEFINITION 2.11 :

a) Si on a une définition $D(o, O_1, \dots, O_n)$ définissant o en utilisant les concepts particuliers (prédéfinis) $O_1, \dots, O_n$, on dira par définition qu'on considère la définition $D(o, O_1, \dots, O_n)$ de *paramètres fixes* $O_1, \dots, O_n$ si :

- Pour $O_1, \dots, O_n$ représentant simultanément les objets $O_{10}, \dots, O_{n0}$ (ou de façon équivalente pour $(O_1, \dots, O_n)$ représentant la séquence $(O_{10}, \dots, O_{n0})$ dont on montrera plus loin l'existence), on considère la définition $D(o, O_{10}, \dots, O_{n0})$.

La notation $D(o, O_1, \dots, O_n)$ représentera toujours une définition de paramètres fixes $O_1, \dots, O_n$.

b) S'il existe au moins une séquence $(O_{10}, \dots, O_{n0})$ représentée par $(O_1, \dots, O_n)$ et si pour chaque séquence $(O_{10}, \dots, O_{n0})$ représentée par $(O_1, \dots, O_n)$ il existe au moins un objet correspondant à la définition $D(o, O_{10}, \dots, O_{n0})$, on dira que $O(O_1, \dots, O_n)$ associé à la définition $D(o, O_1, \dots, O_n)$ est un *concept particulier défini en fonction* de $O_1, \dots, O_n$. Dans ce cas, $(O_1, \dots, O_n)$ représentant $(O_{10}, \dots, O_{n0})$, le concept particulier $O(O_1, \dots, O_n)$ est identifié au concept particulier $O(O_{10}, \dots, O_{n0})$. Il dépend donc de la séquence $(O_{10}, \dots, O_{n0})$ représentée par $(O_1, \dots, O_n)$. Si en outre $O(O_{10}, \dots, O_{n0})$ ne représente qu'un objet pour chaque séquence $(O_{10}, \dots, O_{n0})$, on dira que $O(O_1, \dots, O_n)$ est *défini uniquement en fonction* de $O_1, \dots, O_n$ (ou de $(O_1, \dots, O_n)$) pour la définition considérée.

Si avec les notations précédentes, $O(O_1, \dots, O_n)$ est un concept particulier associé à $D(o, O_1, \dots, O_n)$ et si pour tout $O_{10}, \dots, O_{n0}$ pouvant être représentés simultanément par $O_1, \dots, O_n$, $D(o, O_{10}, \dots, O_{n0})$ est non-floue (resp. cohérente resp. binaire), on dira que $D(o, O_1, \dots, O_n)$ est *non-floue* (resp. *binaire*, resp. *cohérente*) et que $O(O_1, \dots, O_n)$ est un *concept particulier non-flou*.

c) On utilisera parfois l'expression, O_1 étant un concept particulier non-flou, « O_1 représentant O_{10} fixé ». Cela signifiera qu'on considère dans le texte contenant O_1 , que O_1 représente l'objet mathématique particulier O_{10} . (Voir définition 2.3).

La définition précédente est para-mathématique.

REMARQUE 2.12A :

a) Si $D(o, O_1, \dots, O_n)$ est une définition non-floue, d'après la définition d'une définition non-floue, pour tout $O_{10}, \dots, O_{n0}$ représentés simultanément par $O_1, \dots, O_n$, pour tout objet existant O_0 , on a ou bien « $D(O_0, O_{10}, \dots, O_{n0})$ est vraie » ou bien Non (« $D(O_0, O_{10}, \dots, O_{n0})$ est vraie ») et on ne peut avoir « $D(O_0, O_{10}, \dots, O_{n0})$ est vraie » et Non (« $D(O_0, O_{10}, \dots, O_{n0})$ est vraie »).

b) On rappelle qu'on montrera l'existence d'un concept général non-flou représentant un unique objet noté N et ayant les propriétés de l'ensemble des naturels classiques. Alors on verra que $O_{10}, \dots, O_{n0}$ étant n objets mathématiques, il existe une unique séquence $(O_{10}, \dots, O_{n0})$ identifiée au couple (O_{10}, O_{20}) si $n=2$ et à $\{(1, O_{10}), \dots, (n, O_{n0})\}$ si $n>2$. Alors on peut généraliser ce qui précède en remplaçant « $D(o, O_{10}, \dots, O_n)$ » par $D((o_1, \dots, o_p), O_{10}, \dots, O_n)$. Alors on notera $(C_1, \dots, C_p)$ le concept non-flou (s'il existe) associé à $C((o_1, \dots, o_p), O_{10}, \dots, O_n)$. $(C_1, \dots, C_p)$ est un concept particulier non-flou associé à $D((o_1, \dots, o_p), O_{10}, \dots, O_n)$ signifie de façon analogue à ce qui précède que si $O_{10}, \dots, O_n$ représentent simultanément $O_{01}, \dots, O_{0n}$, alors $(C_1, \dots, C_p)$ est un concept non-flou associés à $D((o_1, \dots, o_p), O_{01}, \dots, O_{0n})$. Alors $(C_1, \dots, C_p)$ peut représenter toute séquence $(C_{01}, \dots, C_{0p})$ (On dira $C_1, \dots, C_p$ peuvent représenter simultanément $C_{01}, \dots, C_{0p}$) telle qu'on ait $D(C_{01}, \dots, C_{0p}, O_{01}, \dots, O_{0n})$ est vraie. On généralise alors les points précédents 2.11a)b)c).

Si on a défini comme précédemment un concept non-flou $(C_1, \dots, C_n)$ avec $n>2$, on peut considérer si i est tel que « i est élément de $\{1, \dots, n\}$ » le symbole $C(i, (C_1, \dots, C_n))$ associé à la définition $D(o, i, (C_1, \dots, C_n))$: « (i, o) est élément de $(C_1, \dots, C_n)$ ».

D'après l'Axiome 2.5 $D(o, i, (C_1, \dots, C_n))$ est une relation non-floue. De plus il est évident que i représentant i_0 et $(C_1, \dots, C_n)$ représentant $(C_{01}, \dots, C_{0n})$, $C(i_0, (C_{01}, \dots, C_{0p}))$ représente l'unique objet C_{0i0} . Il en résulte que $C(i, (C_1, \dots, C_n))$ est un concept non-flou défini uniquement en fonction de i et $(C_1, \dots, C_p)$. On identifiera évidemment le concept non-flou $C(i, (C_1, \dots, C_n))$ avec C_i .

Si $n=2$, on obtient facilement de même résultat.

c) On a déjà vu 2 façons de définir un concept général non-flou :

-La première possibilité est de la définir par des définitions axiomatiques partielles, ce qui est presque seulement utilisé pour définir les concepts généraux des fondations des mathématiques (un ensemble, l'EMP, une relation floue, un couple...

-La 2^{ème} possibilité est de le définir en l'associant à une définition générale (c'est-à-dire n'utilisant pas de concepts particuliers pré-définis) non-floue $D(o)$.

-Il existe une 3^{ème} possibilité :

Considérons un concept particulier non-flou $O(O_{10}, \dots, O_n)$ associé à une définition non-floue $D(o, O_{10}, \dots, O_n)$.

D'après sa définition dans la TMP, l'expression $O(O_{10}, \dots, O_n)$ est non-flou signifie que pour $O_{10}, \dots, O_n$ représentant simultanément $O_{10}, \dots, O_{n0}$, $D(o, O_{10}, \dots, O_{n0})$ est non-floue.

On peut définir à partir du concept non-flou $O(O_{10}, \dots, O_n)$ un nouveau concept, appelé « $O(O_{10}, \dots, O_n)$ sans paramètres fixes» et défini par :

« $O(O_{10}, \dots, O_n)$ sans paramètres fixes» peut représenter un objet O_0 est équivalent à « Il existe des objets $O_{10}, \dots, O_{n0}$ tels que $O_{10}, \dots, O_n$ peuvent représenter simultanément $O_{10}, \dots, O_{n0}$ et $O(O_{10}, \dots, O_{n0})$ peut représenter O_0 ».

On montrera que « $O(O_{10}, \dots, O_n)$ sans paramètres fixes» est un concept non-flou et peut donc être identifié à un concept général non-flou.

Il en résulte qu'on pourra définir un concept général «un C_1 (C_1 ne contenant pas de concepts particuliers)» par la proposition :

« On dira que $O(O_{10}, \dots, O_n)$ (sans paramètres fixes) est un C_1 »

La proposition précédente signifiera qu' «un C_1 » est un concept général pouvant représenter les mêmes objets que le concept non-flou « $O(O_{10}, \dots, O_n)$ sans paramètres fixes».

La méthode précédente est une 3^{ème} possibilité pour définir un concept général non-flou.

d) Si on a une définition $D(o, O_{10}, \dots, O_n)$ de paramètres fixes $O_{10}, \dots, O_n$, avec O_i défini en fonction de $O_{i1}, \dots, O_{ik(i)}$, alors O_i n'est défini que pour $O_{i1}, \dots, O_{ik(i)}$ fixés (par exemple à $O_{i10}, \dots, O_{ik(i)0}$), et alors $O_i(O_{i1}, \dots, O_{ik(i)})$ peut représenter les objets représentés par le concept $O_i(O_{i10}, \dots, O_{ik(i)0})$. Donc si O_i est fixé représentant O_{i0} , on considèrera aussi que $O_{i1}, \dots, O_{ik(i)}$ sont fixés.

e) On rappelle que si le concept particulier non-flou $O(O_1, \dots, O_n)$ associé à une définition $D(o, O_1, \dots, O_n)$ est tel que si $O_1, \dots, O_n$ représente simultanément $O_{10}, \dots, O_{n0}$ on a toujours un unique objet O_0 tel que $D(O_0, O_{10}, \dots, O_{n0})$ soit vraie. On dira alors que $O(O_1, \dots, O_n)$ est *défini uniquement en fonction de* $O_1, \dots, O_n$.

f) Soit $O_A(O_1, \dots, O_n)$ un concept particulier non-flou associé à une définition $D_A(o, O_1, \dots, O_n)$, $O_1, \dots, O_n$ étant des concepts particulier non-flous avec $O_A(O_1, \dots, O_n)$ *défini uniquement en fonction de* $O_1, \dots, O_n$.

Nous verrons que $(O_1, \dots, O_n)$ est un concept non-flou et donc d'après l'Axiome 2.5 $(O(O_1, \dots, O_n), (O_1, \dots, O_n))$ est un concept particulier non-flou.

On a vu alors précédemment au c) qu'il existe toujours un concept général non-flou noté F_A pouvant représenter les mêmes séquences que $(O(O_1, \dots, O_n), (O_1, \dots, O_n))$ sans paramètres fixes. De même il existe un concept général non-flou noté $Dep(F_A)$ pouvant représenter les mêmes séquences que $(O_1, \dots, O_n)$ sans paramètres fixe. Ceci signifie donc d'après la définition d'un *concept non-flou sans paramètres fixes* que $Dep(F_A)$ peut représenter toutes les séquences $(O_{10}, \dots, O_{n0})$ telles que $O_1, \dots, O_n$ peuvent représenter simultanément $O_{10}, \dots, O_{n0}$. F_A peut alors représenter tous les couples $(O(O_{10}, \dots, O_{n0}), (O_{10}, \dots, O_{n0}))$.

On dira que F_A est une *fonction-concept définie sur* $Dep(F_A)$ et que $Dep(F_A)$ est le *concept de départ* de F_A .

Si $(O_{10}, \dots, O_{n0})$ peut être représenté par $(O_1, \dots, O_n)$, on identifiera alors $F_A(O_{10}, \dots, O_{n0})$ avec $O_A(O_{10}, \dots, O_{n0})$.

On verra que par exemple les symboles « U », « P » pourront être identifiés à des fonctions-concepts.

Soit alors $O'_1, \dots, O'_n$ n concepts particuliers non-flous tels que « $(O'_1, \dots, O'_n)$ sans paramètre fixe » soit inclus dans « $(O_1, \dots, O_n)$ sans paramètre fixe » (ou, de façon équivalente, dans $Dep(F_A)$). On rappelle que ceci signifie que si $(O'_{10}, \dots, O'_{n0})$ peut être représenté par $(O'_1, \dots, O'_n)$ sans paramètres fixes alors il peut aussi être représenté par $(O_1, \dots, O_n)$ sans paramètres fixes (ou de façon équivalente par $Dep(F_A)$).

Il est évident alors que la définition $D_A(o, O'_1, \dots, O'_n)$ est non-floue (car on remplace des concepts non-flous O_i par les concepts non-flous O'_i), et qu'il existe un concept non-flou $O_B(O'_1, \dots, O'_n)$ associé à cette définition.

De plus si $(O'_{10}, \dots, O'_{n0})$ peut être représenté par $(O'_1, \dots, O'_n)$, il est évident que le concept $O_A(O'_{10}, \dots, O'_{n0})$ et donc aussi $F_A(O_{10}, \dots, O_{n0})$ représentent le même objet que $O_B(O'_{10}, \dots, O'_{n0})$.

On pourra donc identifier $O_B(O'_1, \dots, O'_n)$ avec $F_A(O'_1, \dots, O'_n)$, et donc utiliser $F_A(O'_1, \dots, O'_n)$ dans une définition non-floue si on a défini les concepts particuliers non-flous $O'_1, \dots, O'_n$ et que $(O'_1, \dots, O'_n)$ est inclus dans $Dep(F_A)$. Même si $(O'_1, \dots, O'_n)$ n'est pas inclus dans $Dep(F_A)$, on pourra utiliser $(O'_1, \dots, O'_n)$ dans une définition non-floue, avec par définition que cette définition non-floue n'est pas vraie.

Considérons maintenant une définition non-floue $D(o, P_1, \dots, P_m)$ avec $O'_1, \dots, O'_n$ parmi $P_1, \dots, P_m$ et $(O'_1, \dots, O'_n)$ est inclus dans $(O_1, \dots, O_n)$ (ou, de façon équivalente, dans $Dep(F_A)$). D'après l'Axiome 2.5 on peut utiliser dans $D(o, P_1, \dots, P_m)$ un nouveau symbole $O_C(O'_1, \dots, O'_{j-1}, o, O'_{j+1}, \dots, O'_n)$ associé à une définition auxiliaire $D_A(o_c, O'_1, \dots, O'_{j-1}, o, O'_{j+1}, \dots, O'_n)$.

Mais il est évident que si $O'_1, \dots, O'_{j-1}, O'_{j+1}, \dots, O'_n$ représentent simultanément $O'_{10}, \dots, O'_{j-10}, O'_{j+10}, \dots, O'_{n0}$ avec O_0 objet mathématique tel que $(O'_{10}, \dots, O'_{j-10}, O_0, O'_{j+10}, \dots, O'_{n0})$ appartient à $Dep(F_A)$, alors $O_C(O'_{10}, \dots, O'_{j-10}, O_0, O'_{j+10}, \dots, O'_{n0})$

est identique à $F_A(O'_{10}, \dots, O'_{j-10}, O_0, O'_{j+10}, \dots, O'_{n0})$. Il en résulte qu'on pourra dans $D(o, P_1, \dots, P_m)$ utiliser l'expression $F_A(O'_1, \dots, O'_{j-1}, o, O'_{j+1}, \dots, O'_n)$ identifiée avec le symbole $O_C(O'_1, \dots, O'_{j-1}, o, O'_{j+1}, \dots, O'_n)$ associé à la définition auxiliaire $D_A(o_c, O'_1, \dots, O'_{j-1}, o, O'_{j+1}, \dots, O'_n)$ et défini dans $D(o, P_1, \dots, P_m)$.

Supposons comme précédemment que $D(o, P_1, \dots, P_m)$ est non-floue avec $O'_1, \dots, O'_n$ parmi $P_1, \dots, P_m$ et emploie l'expression $F_A(O'_1, \dots, O'_{j-1}, o, O'_{j+1}, \dots, O'_n)$. Alors $O'_1, \dots, O'_{j-1}, O'_{j+1}, \dots, O'_n$ représentant simultanément $O'_{10}, \dots, O'_{j-10}, O'_{j+10}, \dots, O'_{n0}$ si O_0 est un objet mathématique tel que $(O'_{10}, \dots, O'_{j-10}, O_0, O'_{j+10}, \dots, O'_{n0})$

$_{10}, O_0, O'_{j+10}, \dots, O'_{n0}$) n'appartient pas à $\text{Dep}(F_A)$, $F_A(O'_{10}, \dots, O'_{j-10}, O_0, O'_{j+10}, \dots, O'_{n0})$ n'est pas défini et donc $D(O_0, P_{10}, \dots, P_{m0})$ n'est pas vraie pour cet O_0 .

Les propositions précédentes demeurent vraies si certains O'_j ne sont pas parmi $P_1, \dots, P_m$ mais sont définis dans $D(o, P_1, \dots, P_m)$ par des définitions auxiliaires.

g) Si on exprime une définition $D(o)$ sous la forme d'une définition $D(o, O_1, \dots, O_n)$ de paramètres fixes $O_1, \dots, O_n$, on supposera toujours que pour définir o , $D(o, O_1, \dots, O_n)$ n'utilise aucun concept particulier défini avant $D(o)$ excepté $O_1, \dots, O_n$.

h) O_1 et O_2 étant des concepts particuliers non-flous ne pouvant pas représenter l'EMP, alors on considère le symbole (O_1, O_2) associé à la définition de paramètres fixes O_1, O_2 :

$D(o, O_1, O_2)$: « o est un couple et O_1 est le premier terme de o et O_2 est le 2^{ème} terme de o ».

D'après l'Axiome 2.5, la définition précédente est non-floue et d'après la définition axiomatique d'un couple, (O_1, O_2) est donc un concept particulier non-flou défini uniquement en fonction de O_1 et O_2 . O_1 et O_2 représentant simultanément O_{10}, O_{20} , (O_1, O_2) représente alors (O_{10}, O_{20}) .

De la même façon que pour les fonctions-concepts, on pourra donc utiliser le concept non-flou (O_1, O_2) dans une définition non-floue. On pourra aussi utiliser (o, O_2) ou (O_1, o) dans une définition non-floue $D(o)$.

Si $n > 2$ montrera que si $O_{10}, \dots, O_{n0}$ sont des objets mathématiques, alors la séquence $(O_{10}, \dots, O_{n0})$ est un objet mathématique unique existant, identifié à $\{(1, O_{10}), \dots, (n, O_{n0})\}$.

$O_1, \dots, O_n$ étant des concepts particuliers non-flous, on obtient facilement comme pour $n=2$ que $(O_1, \dots, O_n)$ étant défini comme le symbole représentant $(O_{10}, \dots, O_{n0})$, $O_1, \dots, O_n$ représentant simultanément $O_{10}, \dots, O_{n0}$, alors $(O_1, \dots, O_n)$ est un concept non-flou défini uniquement en fonction de $O_1, \dots, O_n$.

On rappelle qu'on peut définir alors le concept $(O_1, \dots, O_n)$ *sans paramètres fixes* par :

« Le concept $(O_1, \dots, O_n)$ *sans paramètres fixes* peut représenter O_0 » est équivalent à « il existe $O_{10}, \dots, O_{n0}$ tels que $O_1, \dots, O_n$ peuvent représenter simultanément $O_{10}, \dots, O_{n0}$ et O_0 est identique à $(O_{10}, \dots, O_{n0})$ ».

Or on montrera que si $O_1, \dots, O_n$ sont des concepts particuliers non-flous associés à des définitions non-floues (dans un texte) tels qu'on les a définis en 2.11, alors pour $O_{10}, \dots, O_{n0}$ étant des objets mathématiques, on a :

-Ou bien $O_1, \dots, O_n$ peuvent simultanément représenter $O_{10}, \dots, O_{n0}$ ou bien $O_1, \dots, O_n$ ne peuvent pas représenter simultanément $O_{10}, \dots, O_{n0}$.

-On n'a jamais $O_1, \dots, O_n$ peuvent simultanément représenter $O_{10}, \dots, O_{n0}$ et $O_1, \dots, O_n$ ne peuvent pas représenter simultanément $O_{10}, \dots, O_{n0}$.

-Si $O_1, \dots, O_n$ sont des concepts particuliers non-flous (dans un texte) associés à des définitions non-floues de la façon dont on l'a défini, alors il existe au moins une séquence $(O_{10}, \dots, O_{n0})$ telle que $O_1, \dots, O_n$ puisse représenter simultanément $O_{10}, \dots, O_{n0}$.

Et donc si $O_1, \dots, O_n$ ont été définis d'après la TMP comme des concepts non-flous ne pouvant représenter l'EMP alors « $(O_1, \dots, O_n)$ sans paramètres fixes » est un concept non-flou.

Il en résulte qu'on pourra alors définir un concept général non-flou « un C_G » défini par la définition $D_G(\text{un } C_G)$: « On dira que $(O_1, \dots, O_n)$ (sans paramètre fixes) est un C_G », qui est équivalente à « « un C_G » est le concept général pouvant représenter les mêmes séquences que celles pouvant être représentées par « $(O_1, \dots, O_n)$ sans paramètres fixes » ».

On généralise les notions de définition basique et d'un ensemble dont les éléments correspondent à une définition :

DEFINITION 2.12 B

Généralisant la Définition 2.10, une définition $D(o, O_1, \dots, O_n)$ de paramètres fixes $O_1, \dots, O_n$ est *basique* si pour tous objets $O_{10}, \dots, O_{n0}$ pouvant être représentés simultanément par $O_1, \dots, O_n$, tout objet O_0 correspondant à $D(o, O_{10}, \dots, O_{n0})$ appartient à un ensemble, noté $E(O_{10}, \dots, O_{n0})$.

DEFINITION 2.12 C

On dira que A est un ensemble *dont les éléments correspondent à la* définition non-floue $D(o, O_1, \dots, O_n)$ de paramètres fixes les concepts particuliers non-flous $O_1, \dots, O_n$, si pour tout $O_{10}, \dots, O_{n0}$ pouvant être représentés simultanément par $O_1, \dots, O_n$, on a A représente un ensemble A_0 tel que :
« O_0 correspond à $D(O_0, O_{10}, \dots, O_{n0})$ » est équivalent à « O_0 est élément de A_0 . »

La définition précédente est équivalente à la définition purement mathématique :

$D_A(A, O_1, \dots, O_n)$: « A est tel que A est un ensemble et (x est tel que x est élément de A) » est équivalent à x est tel que $D(A, O_1, \dots, O_n)$.

$D_A(o, O_1, \dots, O_n)$ est non-floue d'après l'Axiome 2.5.

On utilisera aussi le concept fondamental de définition récursive Platoniste :

DEFINITION 2.13 A :

Une *définition récursive Platoniste* $D_R(t_0)$ est définie par la donnée de son *premier terme* t_0 (objet mathématique), d'une *propriété récursive* et d'une *clause de récursion* telle que :

(i) Le premier terme de la définition récursive t_0 a la *propriété récursive*.

(ii) Si q_0 est un terme de la définition récursive, alors la *clause de récursion* définit un successeur $s(q_0)$ de q_0 dans la définition récursive, défini uniquement en fonction de q_0 et qui a la propriété récursive.

La définition précédente est évidemment para-mathématique.

AXIOME 2.13 B :

Si $D_R(t_0)$ est une définition récursive Platoniste, alors $D_R(o)$: « o est un terme de $D_R(t_0)$ » est une définition non-floue et pourra donc être utilisée dans une définition non floue.

Il semble alors intuitivement évident qu'il existe un ensemble dont les éléments sont les termes de la définition récursive, et qui est défini uniquement en fonction de t_0 . Ceci signifie qu'il existe un ensemble $A(t_0)$ défini uniquement en fonction de t_0 et dont les éléments correspondent à la définition : $D_R(o)$: « o est un terme de $D_R(t_0)$. Nous admettrons Axiomatiquement l'existence de $A(t_0)$ dans l'Axiome 2.14.

Finalement, l'Axiome permettant d'obtenir l'existence d'ensembles dans la TLP, dont certains points ont été justifiés précédemment et d'autres sont admis dans la Théorie classique des ensembles (qui doit être vraie dans la TLP) est le suivant :

Dans cet Axiome :

-On appellera un *ensemble non-flou* un concept particulier non-flou pouvant représenter seulement un ensemble.

-A et B étant 2 ensembles, A est inclus dans B signifie classiquement « Si x est tel que x est élément de A, alors x est élément de B ». Ceci signifie qu'on pourra identifier le concept « est inclus » (entre 2 ensembles) à une relation non-floue (Définition 2.2A), et donc d'après l'Axiome 2.5 on pourra utiliser « est inclus » dans une définition non-floue.

- On utilisera la propriété évidente d'inclusion réciproque, c'est-à-dire que si A et B sont 2 ensembles non-flous et si on a A est inclus dans B et B est inclus dans A, alors A est identique à B. (Ceci est la conséquence de l'Axiome 2.2B).

-Si on donne une définition sous la forme $D(o, O_1, \dots, O_n)$, $O_1, \dots, O_n$ étant des concepts non-flous, on supposera alors toujours implicitement que $D(o, O_1, \dots, O_n)$ est une définition de paramètres fixes $O_1, \dots, O_n$.

AXIOME 2.14 :

a) Si x est un concept particulier non-flou ne pouvant pas représenter l'EMP, alors il existe un ensemble non-flou $b(x)$ (noté $\{x\}$), dont les éléments sont ceux correspondant à la Définition $D(o, x)$ de paramètre fixe x : « o est identique à x ». (Voir définition 2.12c) Il est évident, utilisant la propriété d'inclusion réciproque que $\{x\}$ est défini uniquement en fonction de x.

On admettra donc que le symbole $\{EMP\}$ ne représente aucun objet mathématique.

L'Axiome précédent para-mathématique est équivalent à l'Axiome suivant purement mathématique :

« Si x_0 est un objet mathématique et x_0 n'est pas identique à l'EMP, alors il existe un et un seul A tel que A est un ensemble et (x est tel que x est élément de A est équivalent à x est tel que x est identique à x_0) ». On identifiera alors l'objet représenté par A avec $\{x_0\}$

D'après la Remarque 2.12Af) on peut identifier « b » à une fonction-concept (« une fonction-concept » étant définie dans la Remarque 2.12 Ae)), définie sur le concept général « un objet mathématique différent de l'EMP ». x' étant un concept particulier non-flou ne représentant pas l'EMP, on pourra utiliser $\{x'\}$, identifié à un concept non-flou, dans une définition non-floue.

b) Pour toute Définition récursive Platoniste $D_R(t_0)$ il existe un ensemble $A(t_0)$, défini uniquement en fonction de t_0 premier terme de la Définition récursive $D_R(t_0)$ et dont les éléments sont ceux correspondant à la Définition $D(o)$: « o est un terme de la Définition récursive $D_R(t_0)$ ».

c) Si A et B sont 2 ensembles non-flous non vides, alors :

-Il existe un ensemble non-flou $A \times B$ dont les éléments sont ceux correspondant à la définition $D(o, A, B)$ de paramètres fixes A, B: « Il existe a tel que a est élément de A et il existe b tel que b est élément de B tels que o est identique à (a, b) ». Il est évident que ce concept particulier non-flou est défini uniquement en fonction de A et B. Par définition si A_0 ou B_0 est l'ensemble vide (noté σ), alors $A_0 \times B_0 = \sigma$.

-Il existe un ensemble non-flou $P(A)$ dont les éléments sont ceux correspondants à la Définition $D(o, A)$ de paramètre fixe A : « o est l'ensemble vide » ou « o est un ensemble différent de l'ensemble vide et pour tout $C(o)$ tel que $C(o)$ est élément de o, $C(o)$ est élément de A », qui est non-floue d'après l'Axiome 2.5)). Il est évident que $P(A)$ est défini uniquement en fonction de A. Si A_0 est l'ensemble vide, par définition $P(A_0) = \{\sigma\}$.

-Il existe un ensemble non-flou $A \cup B$ dont les éléments sont ceux correspondant à la Définition non-floue de paramètres fixes A, B: $D(o)$ « o est élément de A ou o est élément de B ». De même, il est évident que $A \cup B$ est défini uniquement en fonction de A et B.

Par définition si A_0 est l'ensemble vide, pour tout ensemble B_0 : $\sigma \cup B_0 = B_0 \cup \sigma = B_0$.

On pourra montrer simplement qu'il existe aussi des ensembles non-flous $A \cap B$ et A/B , définis de façon analogues à $A \cup B$, et définis uniquement en fonction de A et B.

Comme pour le a), on trouve facilement un Axiome purement mathématique équivalent à l'Axiome para-mathématique précédent.

D'après la Remarque 2.12Af) on peut identifier « U », « $\times$ », « $\cap$ » avec des fonction-concepts définies sur le concept général « un couple d'ensemble ». De même, on peut identifier « P » avec une fonction-concept définie sur le concept général « un ensemble ».

d) Si A est un ensemble non-flou et pour tout a élément de A on a défini un ensemble non-flou $B(a)$ défini uniquement en fonction de a et de A , alors il existe un ensemble non-flou $U_A(B(a))$ dont les éléments correspondent à la définition non-floue $D(o)$ de paramètre fixe A : « Il existe a élément de A tel que o est élément de $B(a)$ ». Il est évident que cet ensemble est défini uniquement en fonction de A . On pourra montrer simplement utilisant cet Axiome 2.14 qu'il existe un concept non-flou $\cap_A(B(a))$, défini de façon évidente, et défini uniquement en fonction de A .

Comme pour le a) et le c), on trouve facilement un Axiome purement mathématique équivalent à l'Axiome para-mathématique précédent.

e) Si $D(o)$ est une définition non-floue basique, alors il existe un ensemble non-flou dont les éléments correspondent à $D(o)$. Il est évident que cet ensemble est unique. Ceci est aussi vrai si on a des concepts particuliers non-flous $O_1, \dots, O_n$, et qu'on a la définition basique et non-floue $D(o, O_1, \dots, O_n)$ de paramètres fixes $O_1, \dots, O_n$. Alors, on obtient l'existence d'un concept non-flou $A(O_1, \dots, O_n)$, défini uniquement en fonction de $(O_1, \dots, O_n)$ et dont les éléments correspondent à $D(o, O_1, \dots, O_n)$. Ainsi, si $(O_1, \dots, O_n)$ représente $(O_{10}, \dots, O_{n0})$, il existe un unique ensemble $A(O_{10}, \dots, O_{n0})$ dont les éléments correspondent à $D(o, O_{10}, \dots, O_{n0})$.

Les Axiomes b) et e) précédents sont des Axiomes méta-mathématiques.

REMARQUE 2.15 :

a) On remarque qu'en 2.14a), on a mis la condition que x ne peut pas représenter l'EMP. En effet, l'EMP est un objet mathématique extrêmement particulier, et on a donc choisi dans la TLP qu'il ne puisse pas être élément d'un ensemble. On peut d'ailleurs déduire de 2.14a) et e) qu'il n'existe aucun ensemble ayant pour élément l'EMP. On considèrera donc toujours que les ensembles considérés ne contiennent pas l'EMP. On rappelle qu'on a admis dans l'Axiome 2.2.C qu'aucun couple ne pouvait avoir l'EMP comme un de ses 2 termes. Ceci entraînera qu'aucune séquence existant dans l'EMP $(O_{10}, \dots, O_{n0})$ ne peut avoir l'EMP comme un des termes.

b) On voit dans l'Axiome 2.14 que tous les concepts dont on obtient l'existence sont non-flous. En effet, le concept de « concept non-flou » est essentiel dans la logique Platonicienne, et donc on doit toujours si possible n'introduire que des concepts non-flous dans la TLP, afin que les Définitions utilisant ces concepts non-flous soient elles aussi non-floues d'après l'Axiome 2.5.

c) On remarque que d'après l'Axiome 2.14e), si $D(o)$ est basique et non-floue mais qu'il n'existe aucun objet correspondant à $D(o)$, alors il existe un ensemble non-flou dont les éléments correspondent à $D(o)$ et qui est l'ensemble vide.

d) On remarque que l'Axiome 2.14 ne permet pas d'obtenir un ensemble ayant l'EMP comme élément, l'EMP n'étant ni un ensemble ni un couple.

e) D'après la Remarque 2.12.A.f), A et B étant 2 concepts particuliers représentant des ensembles, on peut utiliser dans une relation non-floue les concepts particuliers non-flous définis uniquement en fonction de A et (ou) B qu'on a définis dans l'Axiome 2.14 : $A \times B$, $A \cup B$, $A \cap B$ et $P(A)$. Et si x est un concept particulier non flou ne pouvant pas représenter l'EMP, on peut utiliser le concept non-flou $\{x\}$

défini dans l'Axiome 2.14 dans une définition non-floue. On peut aussi dans une définition non floue $D(o)$ utiliser, A étant un ensemble $o \times A$, oUA ou $\{o\}$.

En effet, on a identifié « U », « $\times$ », « $\cap$ » avec des fonction-concepts définies sur le concept général « un couple d'ensemble », on a identifié « P » avec une fonction-concept définie sur le concept général « un ensemble », et on a identifié « b » avec une fonction-concept tel que $b(x)$ est identifié avec à $\{x\}$.

Nous allons maintenant établir des Lemmes et Propositions fondamentaux, qui nous permettront d'obtenir plus loin l'existence de concepts généraux non-flous de la TLP qui pourront être identifiés aux concepts classiques.

LEMME 2.16 :

A étant un ensemble non-flou ne pouvant pas représenter σ (σ ensemble vide), alors il existe un ensemble noté $e(A)$, défini uniquement en fonction de A , qu'on peut représenter par :

$e(A) = \{a \text{ tel que il existe } x \text{ tel que } x \text{ est élément de } A \text{ et } a = \{x\}\}$. ($\{x\}$ représente le concept particulier non-flou introduit en 2.14a))

On définira $e(\sigma)$ par $e(\sigma) = \sigma$

On peut trouver facilement une proposition purement mathématique équivalente au lemme précédent. D'après la Remarque 2.12Ae), on pourra donc utiliser $e(A)$ dans une définition non-floue, A étant un concept particulier prédéfini représentant un ensemble, ou $e(o)$ dans une définition non-floue $D(o)$. En effet on peut identifier « e », d'après la Remarque 2.12f), avec une fonction-concept définie sur le concept général « un ensemble ».

Preuve :

On a d'après l'Axiome 2.14a une fonction-concept b définie sur le concept général « un objet mathématique différent de l'EMP » telle que $b(x) = \{x\}$.

Soit A un ensemble non-flou ne pouvant pas représenter l'ensemble vide.

On considère la définition $D(o, A)$:

« Il existe a élément de A tel que o est identique à $\{a\}$ »

Cette définition est non-floue d'après l'Axiome 2.5.

De plus elle est basique car il est évident que si O_0 correspond à la définition $D(O_0, A_0)$, alors O_0 est élément de $E_0 = P(A_0)$ qui existe d'après l'Axiome 2.14c).

Et donc d'après l'Axiome 2.14, il existe un ensemble $e(A)$ dont les éléments correspondent à la définition précédente $D(o, A)$.

PROPOSITION 2.17A :

a) A et B étant 2 ensembles non-flous non vides, il existe un ensemble non-flou, noté $F(A, B)$, non vide défini uniquement en fonction de A et B , qu'on peut identifier à l'ensemble des *applications* de A dans B .

b) Si f est élément de $F(A, B)$, on dira que f est une *fonction d'ensemble*. Et que A est l'*ensemble de départ* de f et B est l'*ensemble d'arrivée* de f . On notera $C(f)$ le symbole particulier associé à $D(o, f)$: « o est le 2^{ième} terme de f ». $C(f)$ est alors un concept particulier non vide défini uniquement en fonction de f . ($C(f)$ représente l'ensemble des couples $(a, f(a))$). On dira que $C(f)$ est le *corps* de f .

On peut trouver facilement une proposition purement mathématique équivalente au lemme précédent. D'après la Remarque 2.12Af), on pourra identifier « F » avec une fonction-concept définie sur le concept général « un couple d'ensembles », et « C », « l'ensemble de départ de » et l'ensemble d'arrivée de » avec des fonction-concepts définies sur le concept-général « une fonction d'ensemble ». On pourra donc utiliser $F(A, B)$ dans une définition non-floue, A et B étant des concepts particulier

prédéfinis représentant des ensembles, et $C(f)$, f représentant des fonctions d'ensemble ou $C(o)$ dans une définition non-floue $D(o)$. « Une fonction d'ensemble » est donc un concept général.

Preuve :

A et B étant 2 ensembles non-flous non vides, d'après 2.14c), on a défini la fonction-concept « P » qui est définie sur le concept général « un ensemble », et la fonction-concept « $\times$ » qui est définie sur le concept général « un couple d'ensemble ». On peut donc d'après la Remarque 2.12Af utiliser le concept non-flou $P(A \times B)$ défini uniquement en fonction de A et B, dans une définition non-floue.

On considère alors la définition de paramètres fixes A,B:

$D_1(o, A, B)$: « o est un élément de $P(A \times B)$ et pour tout a tel que élément de A, il existe un et un seul $C(o, a)$ tel que $C(o, a)$ est élément de o et a est le premier terme de $C(o, a)$ ».

(On a utilisé (implicitement) une définition auxiliaire $D_{aux}(o_c, o, a)$) dans la définition précédente).

Cette définition est évidemment basique et elle est non-floue d'après l'Axiome 2.5. Donc d'après l'Axiome 2.14e), il existe un ensemble non-flou $F_1(A, B)$, défini uniquement en fonction de A et B, dont les éléments correspondent à $D_1(o, A, B)$.

De plus $F_1(A, B)$ est non vide car, (A,B) représentant (A_0, B_0) , b_0 étant un élément de B_0 , on montre facilement que l'ensemble des couples (a, b_0) , a étant élément de A_0 , existe et appartient à $F_1(A_0, B_0)$.

On sait que (A,B) est un concept non-flou, et donc d'après l'Axiome 2.14a), $\{(A, B)\}$ est un concept non-flou défini uniquement en fonction de A et B.

Utilisant alors l'Axiome 2.14c), on obtient que $\{(A, B)\} \times \{F_1(A, B)\}$ est un concept non-flou défini uniquement en fonction de A,B et non vide.

On identifiera $F(A, B)$ avec ce concept non-flou.

Si A_0 ou B_0 est l'ensemble vide, on définira $F(A_0, B_0)$ par $F(A_0, B_0) = \{(A_0, B_0)\} \times \{\sigma\}$.

Le b) est alors évident.

REMARQUE 2.17B:

a) Si f est une fonction d'ensemble, et a est tel que (Si A est tel que A est l'ensemble de départ de f , alors a est élément de A).

On définit alors le symbole $im(f, a)$ associé à la définition $D(o, f, a)$: « (a, o) est élément de $C(f)$ ».

Il est évident que d'après la définition d'une fonction d'ensemble, $im(f, a)$ est un concept non-flou défini uniquement en fonction de f, a . On pourra donc identifier « im » avec une fonction-concept définie sur le concept général représentant tous les (f, a) . On identifiera alors $f(a)$ avec $im(f, a)$.

D'après la Remarque 2.12f, on pourra donc utiliser $f(a')$ dans des définitions dont les paramètres fixes contiennent les concepts non-flous f' et a' , avec f' représentant des fonctions d'ensembles et a' des éléments de l'ensemble de départ de f' . On pourra aussi utiliser dans des définitions auxiliaires $D_C(o_c, O'_1, \dots, O'_n)$ (avec f' et a' parmi $O'_1, \dots, O'_n$) d'une définition non-floue $D(o, P_1, \dots, P_m)$ les expressions $f'(o)$ ou $o(a')$.

Classiquement on dira que $f(a)$ est l'image de par f .

LEMME 2.18 :

a) A et B étant 2 ensembles non-flous non vides, si a est le concept particulier non-flou associé à $D_1(o_a, A)$: « o_a est élément de A » et si on a une définition non-floue $D_{im}(o_i, a, B)$ telle qu'il existe un

concept non-flou noté $f_B(a)$ associé à $D_{im}(o_i, a, B)$ et défini uniquement en fonction de a et B et que d'après cette définition, $f_B(a)$ est élément de B , alors il existe un concept non-flou f défini uniquement en fonction de A, B , associé à la définition $D_f(o, A, B)$: « o est un élément de $F(A, B)$ et si pour tout a tel que a est élément de A , si $f_B(a)$ est tel que $D_{im}(f_B(a), a, B)$ alors, $o(a)$ est identique à $f_B(a)$ ».

b) Dans de nombreux cas $f_B(a)$ n'est pas défini uniquement en fonction de a , mais en fonction de $a, B, O_1, \dots, O_n$, $O_1, \dots, O_n$ étant des concepts non-flous. Alors si a est le concept non-flou associé à $D_1(o_a)$: « o_a est élément de A » et si on a une définition non-floue $D_{im}(o_i, a, B, O_1, \dots, O_n)$ telle qu'on ait un concept non-flou noté $f_B(a)_{(O_1, \dots, O_n)}$ associé à $D_{im}(o_i, a, B, O_1, \dots, O_n)$ et défini uniquement en fonction de $a, B, O_1, \dots, O_n$ avec $f_B(a)_{(O_1, \dots, O_n)}$ est élément de B , alors il existe un concept non-flou f associé à la définition $D_f(o, A, B, O_1, \dots, O_n)$: « o est un élément de $F(A, B)$ et pour tout a élément de A , si $f_B(a)_{(O_1, \dots, O_n)}$ est tel que $D_{im}(o_i, a, B, O_1, \dots, O_n)$, alors $o(a)$ est identique à $f_B(a)_{(O_1, \dots, O_n)}$ », f étant défini uniquement en fonction de $A, B, O_1, \dots, O_n$ pour cette définition.

Preuve :

a) On considère alors la définition $D_2(o, A, B)$ de paramètre fixe A, B :

$D_2(o, A, B)$: « Il existe a élément de A , tel que si $f_B(a)$ est tel que $D_{im}(f_B(a), a, B)$ alors o est identique à $(a, f_B(a))$ ».

A, B représentant simultanément A_0, B_0 , il est évident que si $D_2(O_0, A_0, B_0)$ est vraie, alors O_0 est élément de $E(A_0, B_0) = A_0 \times B_0$, puisqu'on a supposé $f_B(a)$ est élément de B .

Donc $D_2(o, A, B)$ est basique, et elle est non-floue d'après l'Axiome 2.5.

Donc d'après l'Axiome 2.14.e). il existe un concept non-flou noté $f_{C(A, B)}$, défini uniquement en fonction de (A, B) associé à la définition :

$D_3(o, A, B)$: « o est un ensemble dont les éléments correspondent à $D_2(o_2, A, B)$ ».

On considère alors l'ensemble $f_{(A, B)} = ((A, B), f_{C(A, B)})$

Il est évident que supposant (A, B) représente (A_0, B_0) , $f_{(A_0, B_0)}$ correspond à la définition $D_f(o, A_0, B_0)$ du lemme et donc le symbole particulier f associé à $D_f(o, A, B)$ est un concept non-flou (Car $D_f(o, A, B)$ est non-floue). On obtient immédiatement que de plus f est défini uniquement en fonction de A, B .

D'où le résultat.

b) On démontre le b) de la même façon que le a).

Le lemme précédent est para-mathématique, puisqu'il utilise le terme « définition non-floue ».

LEMME 2.19 :

A et B étant 2 ensembles non-flous ne pouvant pas représenter l'ensemble vide et f étant une application de A dans B , alors pour tout b dans B il existe un ensemble non-flou, noté $f^1(b)$ dont les éléments correspondent à la définition $D(o, b, f)$: « b est l'image de o par f » (ou « (o, b) est élément de $C(f)$ »), qui est défini uniquement en fonction de f et b .

De la même façon que pour le lemme précédent, f^* étant un concept non-flou représentant des fonctions d'ensemble, et b étant défini par « Si B est l'ensemble d'arrivée de f^* , alors b est élément de B », on pourra utiliser l'expression $f^{*-1}(b^*)$ dans une définition non-floue, en identifiant $f^1(b)$ à une fonction-concept « ant », telle que $f^1(b)$ est identifié à $\text{ant}(f, b)$.

Preuve :

Soit A, B 2 ensembles non-flous, f le concept associé à la définition de paramètres fixes A, B « o est élément de $F(A, B)$ » et b le concept associé à la définition de paramètre fixe B : « o est élément de B ». f et b sont des concepts non-flous d'après l'Axiome 2.5 et le Lemme 2.17.

On considère alors la définition de paramètres fixes f et b :

$D(o,b,f) : \langle (o,b) \text{ est élément de } C(f) \rangle$

Il est évident que $D(o,b,f)$ est basique et qu'elle est non-floue d'après l'Axiome 2.5.

Donc il existe d'après l'Axiome 2.14e) un ensemble non-flou $f^1(b)$ dont les éléments correspondent à $D(o,b,f)$, et qui est défini uniquement en fonction de f et b .

On a aussi le Lemme :

LEMME 2.20 :

A étant un ensemble non-flou ne pouvant représenter l'ensemble vide, B étant le concept associé à « o est élément de $P(A)$ », il existe un concept non-flou $f_{\text{Car}(B),A}$ associé à la définition $D_f(o,A,B) : \langle o \text{ est élément de } F(A, \{\sigma, \{\sigma\}\}) \rangle$ et pour tout a élément de A , (« a est élément de B ») est équivalent à (« l'image de a par o est $\{\sigma\}$ ») et (« a n'est pas élément de B ») est équivalent à (« l'image de a par o est σ »), $f_{\text{Car}(B),A}$ étant défini uniquement en fonction de A et B . (A cause de la signification « est équivalent », on aurait pu utiliser une seule des 2 équivalences précédentes).

On dira alors que $f_{\text{Car}(B),A}$ est la *fonction caractéristique* de B dans A .

Le lemme précédent est para-mathématique, on pourrait trouver une formulation purement mathématique équivalente. Il entraîne qu'on peut définir une fonction concept notée « fonction caractéristique » défini sur le concept général pouvant représenter tous les (A,B) , avec A est tel que A est un ensemble non-vide et B est tel que B est inclus dans A .

On a alors fonction caractéristique(A,B) est identique à $f_{\text{Car}(B),A}$.

Preuve :

On suppose donc que A ne peut représenter l'ensemble vide.

Le cas où B est égal à l'ensemble vide est évident, on supposera donc que B est différent de l'ensemble vide.

Nous représenterons σ par le symbole 0 et $\{\sigma\}$ par le symbole 1.

σ est un concept non-flou représentant un unique objet d'après l'Axiome 2.5 et donc $\{\sigma\}$ est un concept non-flou représentant un unique objet d'après l'Axiome 2.14a). $\{\sigma, \{\sigma\}\}$ est un ensemble non-flou représentant un unique objet d'après l'Axiome 2.14.

A étant un concept non-flou et B étant le concept associé à « o est élément de $P(A)$ » et o est différent de l'ensemble vide», d'après l'Axiome 2.5 B est un concept non-flou.

On définit alors le concept a associé à « o est élément de A »

On considère la définition de paramètres fixes a,A,B :

$D_1(o,a,A,B) : \langle o \text{ est élément de } \{0,1\} \rangle$ et (« o est identique à 1 ») est équivalent à « a est élément de B » et (« o est identique à 0 ») est équivalent à « a est élément de B »

Cette définition est non-floue d'après l'Axiome 2.5. De plus il est évident que a,A,B représentant a_0,A_0,B_0 , au moins un objet mathématique O_0 correspond à $D(o,a_0,A_0,B_0)$.

On a donc un concept non-flou $f_{1A,B}(a)$ associé à $D_1(o,a,A,B)$ défini uniquement en fonction de a,A,B .

On considère alors la définition :

$D_2(o,a,A,B) : \langle o \text{ est identique à } (a, f_{1A,B}(a)) \rangle$

Soit donc $f_{2A,B}(a)$ symbole associé à $D_2(o,a,A,B)$ (qui est évidemment un concept non-flou défini uniquement en fonction de a,A,B).

Soit alors la définition :

$D_3(o,A,B) : \langle \text{Il existe } a \text{ élément de } A \text{ tel que } o \text{ est identique à } f_{2A,B}(a) \rangle$.

Cette définition est évidemment basique et non-floue, et donc il existe un concept non-flou, $f_{CA,B}$ défini uniquement en fonction de A,B associé à la définition :

$D_4(o,,A,B) : \langle o \text{ est l'ensemble dont les éléments correspondent à la définition } D_3(o_1,A,B) \rangle$.

On considère alors le concept non-flou $f_{4A,B}((A, \{0,1\}), f_{CA,B})$ défini uniquement en fonction de A, B . Il est évident que A, B représentant A_0, B_0 , f_{4A_0, B_0} correspond à la définition $D_f(o, A_0, B_0)$, et donc $f_{CarB, A}$ est un concept non-flou. On montre immédiatement qu'il est défini uniquement en fonction de A, B .

On démontre de façon analogue la réciproque du Lemme précédent :

LEMME 2.21 :

A étant un ensemble non-flou, et f étant le concept non-flou associé à « o est élément de $F(A, \{0,1\})$ », il existe un concept non-flou associé à la définition $D_p(o, A, f)$: « o est un élément de $P(A)$ et pour tout a élément de A , $(f(a)=1)$ est équivalent à « a est élément de o », défini uniquement en fonction de A et f .

Là encore on pourrait trouver une formulation purement mathématique équivalente au lemme précédent. On pourrait aussi définir une fonction-concept défini sur le concept général pouvant représenter tous les (A, f) , avec A est tel que A est un ensemble et f est telle que f est élément de $F(A, \{0,1\})$.

3. CONCEPTS BASIQUES FONDAMENTAUX

En utilisant les chapitres précédents, on peut alors montrer théoriquement qu'on peut identifier les concepts mathématiques classiques à des concepts non-flous existants dans l'EMP, c'est-à-dire que les concepts mathématiques classiques existent au sens Platoniste.

PROPOSITION 3.1 :

Il existe un concept général non-flou qu'on peut identifier à $\mathbb{N}$.

La proposition précédente est para-mathématique.

Preuve :

On considère la définition récursive Platoniste $D_N(\sigma)$ (notée D_N) définie par :

- σ (l'ensemble vide), est le premier terme de la définition récursive D_N ayant la propriété récursive de D_N $P(\sigma)$: « σ est un ensemble ».

-Si q_0 est un terme de la définition récursive ayant la propriété récursive $P(q_0)$: « q_0 est un ensemble », la clause de récursion de D_N définit le terme successeur de q_0 par la définition récursive : $s(q_0)$ est identique à $e(q_0) \cup \{\sigma\}$, $e(q)$ étant le concept non flou défini uniquement en fonction de q au Lemme 2.16. ($e(\sigma)=\sigma$ et si q est différent de σ , $e(q)=\{a \text{ tel que il existe } x \text{ tel que } x \text{ est élément de } q \text{ et } a=\{x\}\}$).

Il est évident que q_0 ayant la propriété récursive, c'est-à-dire représentant un ensemble, $s(q_0)$ existe et est défini uniquement en fonction de q_0 , puisque d'après le Lemme 2.16 $e(q)$ est défini uniquement en fonction de q . De plus $s(q_0)$ est un ensemble et donc il a la propriété récursive.

Donc D_N est bien une définition récursive Platoniste.

D'après l'Axiome 2.14b), il existe un ensemble noté $A(\sigma)$, défini uniquement en fonction de σ et donc unique, et dont les éléments sont les termes de la définition récursive, c'est-à-dire : $\sigma, \{\sigma\}, \{\sigma, \{\sigma\}\}, \{\sigma, \{\sigma\}, \{\{\sigma\}\}\}, \dots$, qu'on identifiera à $0, 1, 2, 3, \dots$. On identifiera donc $A(\sigma)$ à un concept général non-flou représenté par $\mathbb{N}$, et de même $0, \dots, 3, \dots$ à des concepts généraux non-flous.

On note classiquement i_0+1 le successeur $s(i_0)$ de i_0 dans D_N .

On admet comme un axiome évident (Axiome de récursivité) l'Axiome suivant :

AXIOME 3.1A : (Axiome de récursivité) :

Soit $D_R(t_0)$ une définition Platoniste récursive.

Soit t_0 le 1^{er} terme de D_R .

Soit $P(o)$ une propriété, utilisant seulement o , des concepts généraux et des concepts primitifs comme ceux qui ont été définis.

Alors si $P(t_0)$ est vraie et de plus si q_0 étant un terme de D_R on a $P(q_0)$ entraîne $P(s(q_0))$, alors $P(q_0)$ est vraie pour tout terme de la définition récursive.

Utilisant cet Axiome de récursivité on montre que si q_0 est un terme de D_N , alors q_0 est inclus dans $s(q_0)$.

On considère pour cela la propriété $P(q_0)$:

$P(q_0)$:

(i) q_0 est inclus dans $s(q_0)$ et $s(q_0)/q_0$ a un unique élément noté $t(s(q_0))$.

(ii) $t(s(q_0)) = \{t(q_0)\}$

On aurait pu considérer une définition récursive Platoniste plus simple comme celle définie par $s(q_0) = q_0 \cup \{q_0\}$ (qui donne la séquence de von Neumann). Les résultats obtenus pour D_N se généralisent à cette nouvelle définition récursive. Cependant, les 2 définitions récursives ne définissent pas le même ensemble N .

Cependant, D_N permet d'obtenir un ensemble dont les éléments s'écrivent beaucoup plus simplement que les termes de la séquence de von Neumann.

DEFINITION 3.1B : (ordination d'une définition récursive).

On notera i_0+1 le successeur de i_0 dans D_N .

Supposons qu'on ait une définition récursive Platoniste D_R , de premier terme t_0 . On note dans cette définition $s(q_0)$ le successeur de q_0 dans D_R .

On considère alors la définition récursive $D_{R,N}$ de premier terme $(1, t_0)$ et telle que dans cette définition récursive le successeur de (i_0, q_0) soit $(i_0+1, s(q_0))$. On vérifie immédiatement que $D_{R,N}$ est bien une définition récursive Platoniste.

D'après l'Axiome 2.14b), il existe un ensemble $A_N((1, t_0))$ dont les éléments sont les termes de $D_{R,N}$.

Il est alors évident que $((N^*, N), A_N((1, t_0)))$ est alors un élément de $F(N^*, N)$ tel qu'on l'a défini en 2.17.

On appellera cette fonction *ordination de D_R* , notée $f_{N,DR}$, et elle permet d'utiliser chaque terme de D_R , en effet le $i_0^{\text{ème}}$ terme de D_R est identique à $f_{N,DR}(i_0)$.

REMARQUE 3.2 :

a) On peut facilement définir le concept général non-flou « une bijection d'ensemble » inclus dans le concept général non-flou « une fonction d'ensemble ». On peut alors définir le concept général non-flou « un ensemble fini » associé à la définition générale suivante :

$D_{\text{ef}}(o) =$ « o est identique à l'ensemble vide ou o est tel que o est un ensemble non vide et il existe n tel que n est élément de N et il existe $C(o, n)$ tel que $C(o, n)$ est élément de $F(o, n)$ et $C(o, n)$ est une bijection d'ensemble ».

D'après l'Axiome 2.5, la définition précédente est non-floue et donc « un ensemble fini » est bien un concept général non-flou.

Si A est un ensemble fini, on définit $\text{Card}(A)$ comme le concept particulier non-flou associé à la définition non-floue :

$D_{\text{Card}}(o) :$ « Si A est identique à l'ensemble vide, o est identique à σ , si A est différent de l'ensemble vide, o est tel que o est élément de N et il existe $c(o, A)$ tel que $c(o, A)$ est élément de $F(o, A)$ et $c(o, A)$ est une bijection d'ensemble. »

Il est évident que $\text{Card}(A)$ est un concept non-flou défini uniquement en fonction de A , car il est évident qu'il ne peut avoir de bijections d'ensemble entre 2 naturels distincts.

A' étant un concept non-flou représentant seulement des ensembles finis, on peut donc utiliser $\text{Card}(A')$ dans une définition non-floue.

b) De plus, on remarque que les termes de la définition récursive vérifient les Axiomes de Peano, c'est-à-dire, remplaçant « nombre » par « terme (de la suite récursive D_N définie précédemment) » :

A_{xp1}) Il existe un premier terme : σ

A_{xp2}) Chaque terme de la suite q a un unique successeur immédiat $s(q)$.

A_{xp3}) σ n'est le successeur immédiat d'aucun terme (Puisque sinon il contiendrait σ et serait donc non-vide.)

A_{xp4}) Si q_1 et q_2 sont 2 termes de la suite ayant le même successeur immédiat q_3 alors q_1 est identique à q_2 (Ceci se montre facilement).

A_{xp5}) Toute propriété $Q(q)$ appartenant à σ et au successeur immédiat de tout terme ayant cette propriété appartient à tous les termes. (Ceci est évident car $Q(\sigma)$ entraîne $Q(s(\sigma))$qui entraîne de proche en proche $Q(n)$, n terme quelconque de la suite).

On remarque que A_{xp5} n'est qu'une forme de l'Axiome de récursivité.

c) Puisque les Axiomes de Peano sont des propositions vraies de la TMP concernant les naturels tels qu'on les a définis dans la TMP, on obtient que tous les théorèmes classiques concernant les naturels sont aussi vraies dans la TMP. En effet, d'après l'Axiome 2.2.E, les propositions qu'on peut déduire des propositions vraies de la TMP (et donc les théorèmes déduits des Axiomes de Peano) sont vraies.

PROPOSITION 3.3 :

Il existe des concepts généraux non-flous, qu'on peut identifier à $\mathbf{Z}$ et $\mathbf{Q}$.

Preuve :

On a montré l'existence d'un concept général non-flou représentant un unique objet mathématique identifié à $\mathbf{N}$.

D'après l'Axiome 2.14c), $\mathbf{N} \times \{1\}$ représente un unique objet mathématique, qui est un ensemble (représenté par le concept général $\mathbf{Z}^+$), de même que $\mathbf{N}^* \times \{0\}$ (représenté par le concept général $\mathbf{Z}^*$) où $\mathbf{N}^* = \mathbf{N} \setminus \{0\}$ (On rappelle qu'on a identifié 1 et 0 à des concepts généraux représentant chacun un unique objet mathématique).

Et donc d'après l'Axiome 2.14, $\mathbf{N} \times \{1\} \cup \mathbf{N}^* \times \{0\}$ représente un unique objet qu'on représentera par le concept général $\mathbf{Z}$.

$\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ représente un unique objet mathématique d'après l'Axiome 2.14. Et donc $\mathbf{Z} \times (\mathbf{Z} \setminus \{(0,1)\})$ représente un unique objet mathématique qu'on représentera par le concept général $\mathbf{Q}$.

PROPOSITION 3.4 :

a) L'addition et la multiplication dans $\mathbf{N}, \mathbf{Q}, \mathbf{Z}$ peuvent être identifiés à des objets mathématiques représentés par des concepts généraux ($+_{\mathbf{N}}, +_{\mathbf{Z}}, +_{\mathbf{Q}}$ et $\times_{\mathbf{N}}, \times_{\mathbf{Z}}, \times_{\mathbf{Q}}$).

b) De même on identifie « la valeur absolue de » et « l'opposé de » à des concepts généraux non-flous représentant chacun un unique objet (Le premier étant une application de $\mathbf{Q}$ dans $\mathbf{Q}^+$, le second une application de $\mathbf{Q}$ dans $\mathbf{Q}$) et la soustraction dans $\mathbf{Z}$ et $\mathbf{Q}$, notées $(-_{\mathbf{Z}}, -_{\mathbf{Q}})$ à des concepts généraux non-flous représentant chacune une unique application.

c) On identifie aussi les relations d'ordres $<, >, \leq, \geq$ dans $\mathbf{N}, \mathbf{Q}, \mathbf{Z}$ à des relations non-floues ayant la même signification que dans les mathématiques classiques.

Bien sûr on omettra les suffixes $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}$ lorsque le sens est évident d'après le contexte.

Preuve :

$\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ représente un ensemble existant d'après l'Axiome 2.14.

Pour tout (a,b) élément de $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$, puisqu'on a vu que les éléments de l'ensemble identifié à $\mathbf{N}$ ont exactement les mêmes propriétés que les naturels dans la théorie classique c'est-à-dire déduites des Axiomes de Peano, on peut obtenir un concept mathématique non-flou noté $ad(a,b)$ défini uniquement en fonction de a et b , appartenant à $\mathbf{N}$ et identifié à la somme classique des 2 naturels a et b . Alors d'après le Lemme 2.18 il existe un concept non-flou représentant un unique objet mathématique élément de $F(\mathbf{N} \times \mathbf{N}, \mathbf{N})$, tel que pour tout (a,b) de $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$, l'image de (a,b) par cet objet soit $ad(a,b)$ défini précédemment.

Et donc $+_{\mathbf{N}}$ sera le concept général représentant l'unique objet mathématique précédent, appelé aussi « addition dans $\mathbf{N}$ ».

De même on obtient l'existence d'un concept général non-flou qu'on peut identifier avec la multiplication dans $\mathbf{N}$.

Utilisant l'existence de l'addition et de la multiplication dans $\mathbf{N}$, il est facile utilisant le Lemme 2.18 d'obtenir des concepts généraux non-flous qu'on peut identifier avec l'addition et la multiplication dans $\mathbf{Z}$ et $\mathbf{Q}$ puis $\mathbf{R}$.

On a vu que « Card » était une fonction-concept définie sur le concept général « un ensemble fini ». A étant concept non-flou représentant un ensemble fini, on sait qu'on peut utiliser « $Card(A)$ » dans une définition non-floue.

On définit alors facilement l'addition ad et la multiplication mul dans $\mathbf{N}$ par, n et p étant 2 éléments quelconques de $\mathbf{N}$:

$$ad(n,p) = Card(n \cup (p \times \{1\})) \text{ et } mul(n,p) = Card(n \times p)$$

Il en résulte qu'on obtient la définition de l'addition et de la multiplication dans $\mathbf{N}$ (puis dans $\mathbf{Z}$ et $\mathbf{Q}$) de façon beaucoup plus simple que les méthodes proposées précédemment qui sont analogues à celles des mathématiques actuels (non Platonistes).

On montre alors facilement le b) de la Proposition 3.4.

De même on définit la relation d'ordre $\leq$ dans $\mathbf{N}$, par :

« $n \leq p$ » est équivalent à « n est inclus dans p ».

On généralise alors la définition de $<, >, \geq$ dans $\mathbf{N}$.

On généralise facilement la définition des relations non-floue $<, >, \leq$ dans $\mathbf{Z}$ et $\mathbf{Q}$.

On identifie « est l'opposé de » et « est la valeur absolue de » avec des concepts généraux représentant des applications de $\mathbf{Q}$ dans $\mathbf{Q}$, de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{Z}$, de $\mathbf{Q}$ dans $\mathbf{Q}^+$, de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{Z}^+$.

Puis à l'aide du concept général « est l'opposé de » (dans $\mathbf{Q}$ ou dans $\mathbf{Z}$), on définit les concepts généraux $-_{\mathbf{Q}}$ et $-_{\mathbf{Z}}$, qui sont la soustraction classique dans $\mathbf{Q}$ et $\mathbf{Z}$.

PROPOSITION 3.5 :

Il existe un concept général non-flou, $\mathbf{R}$, ayant les mêmes propriétés que l'ensemble des réels dans les mathématiques pré-Platonistes.

Preuve :

On a déjà montré l'existence de concepts généraux non-flous $\mathbf{Q}$ et $\mathbf{N}$, ayant les mêmes propriétés que les ensembles $\mathbf{Q}$ et $\mathbf{N}$ dans les mathématiques pré-Platonistes.

D'après la Proposition 2.17 il existe un concept général non-flou représentant un objet unique $F(\mathbf{N}, \mathbf{Q})$, dont on appellera les éléments « suites de rationnels ». (« une suite de rationnels » étant un concept général dont on peut facilement trouver la définition générale non-floue qui lui est associée).

On considère alors la définition classique d'une suite de Cauchy :

$D_{\text{Cauchy}}(o)$: « o est un élément de $F(\mathbf{N}, \mathbf{Q})$ et pour tout ε rationnel strictement positif, il existe un naturel N tel que pour tout i naturel supérieur à N et pour tout j naturel supérieur à N , $|o(i) - o(j)| < \varepsilon$ » (On a vu $o(i)$ est l'image de i par o . »

$D_{\text{Cauchy}}(o)$ est évidemment basique puisqu'elle entraîne que o est élément de $F(\mathbf{N}, \mathbf{Q})$ qui est un concept général non-flou.

De plus dans $D_{\text{Cauchy}}(o)$ on peut identifier « ε rationnel strictement positif » avec « ε est élément de $\mathbf{Q}^{*+}$ ».

On peut identifier « i naturel supérieur à N » avec « i est élément de $\mathbf{N}$ et $i \geq N$ ».

Enfin d'après la Proposition 3.4 et la Remarque 2.17B on peut utiliser dans une définition non-floue « $|o(i) - o(j)| < \varepsilon$ (Qui s'écrit avec nos notations (valeur absolue de $(o(i) - o(j))) < \varepsilon$).

On a donc, $D_{\text{Cauchy}}(o)$ est non-floue d'après la l'Axiome 2.5.

De plus d'après la Remarque 2.12j), $D_{\text{Cauchy}}(o)$ est une définition générale (Elle n'utilise pas de concepts particuliers non-flous pré-définis).

Donc d'après l'Axiome 2.14e), il existe un ensemble non-flou dont les éléments sont les suites de Cauchy qui est un concept général et qu'on représentera par $\mathbf{R}$.

PROPOSITION 3.6 :

Si $O_1, \dots, O_n$ sont des concepts particuliers non-flous, alors il existe un concept particulier non-flou défini uniquement en fonction de $O_1, \dots, O_n$ qu'on peut identifier à $(O_1, \dots, O_n)$. (Dans O_i , le suffixe « i » n'est pas un naturel tel qu'on les a définis (éléments de $\mathbf{N}$) mais un signe distinctif).

Preuve :

S'il n'y a qu'un concept particulier O_1 , on considère le concept particulier $\{(1, O_1)\}$, identifié à (O_1) , qui existe et est non-flou d'après l'Axiome 2.14e). (1 étant le concept général représentant l'ensemble ayant pour unique élément l'ensemble vide).

S'il n'y a que 2 concepts particuliers, O_1, O_2 , on a d'après l'Axiome 2.5 l'existence du concept particulier non-flou (O_1, O_2) , défini uniquement en fonction de O_1 et O_2 .

S'il y a au moins 3 concepts particuliers $O_1, \dots, O_n$, on peut définir alors d'après l'Axiome 2.14a) considérant $1, 2, 3, \dots, n$ comme des concepts généraux non-flous les concepts particuliers non-flous $\{(1, O_1)\}, \dots, \{(n, O_n)\}$.

Une récurrence immédiate montre alors que :

$\{(1, O_1)\} \cup \dots \cup \{(n, O_n)\}$ est un concept non-flou défini uniquement en fonction de $O_1, \dots, O_n$.

On justifie facilement qu'il est défini uniquement en fonction de $O_1, \dots, O_n$, car, $O_1, \dots, O_n$ représentant $O_{10}, \dots, O_{n0}$, ses éléments sont $(1_0, O_{10}), \dots, (n_0, O_{n0})$.

PROPOSITION 3.7 :

$O_1, \dots, O_n$ étant des concepts particuliers non-flous définis par des définitions non-floues successives, il existe toujours au moins une séquence $(O_{10}, \dots, O_{n0})$ pouvant être représentée par $(O_1, \dots, O_n)$ et donc, de façon équivalente, il existe $O_{10}, \dots, O_{n0}$ pouvant être représentés simultanément par $O_1, \dots, O_n$. (Comme précédemment, dans O_i , le suffixe « i » n'est pas un naturel tel qu'on les a définis (éléments de $\mathbf{N}$) mais un signe distinctif).

Preuve :

Supposons qu'on définisse un seul concept particulier non-flou O_i à la fois dans une définition et qu'on définisse successivement $O_1, \dots, O_n$. Le cas où en définit plusieurs à la fois se généralise sans difficulté en procédant exactement de la même façon.

On définit donc en premier lieu utilisant une définition $D_1(o)$ n'utilisant aucun concept particulier prédéfini le concept particulier non-flou O_1 qui peut représenter au moins un objet O_{10} , d'après la définition d'un concept non-flou pour une telle définition. Donc $(1, O_1)$ peut représenter au moins un objet $(1, O_{10})$.

Supposons $P(i-1)$:

$P(i-1)$: $(O_1, \dots, O_{i-1})$ peut représenter au moins une séquence $(O_{10}, \dots, O_{i-10})$

On sait qu'on définit O_i concept particulier non-flou ou bien utilisant une définition non-floue $D_i(o)$ n'utilisant aucun concept particulier prédéfini, alors O_i peut représenter au moins un objet mathématique O_{i0} et alors $O_1, \dots, O_i$ peuvent représenter simultanément $O_{10}, \dots, O_{i0}$, et alors $(O_1, \dots, O_i)$ peut représenter au moins un objet $(O_{10}, \dots, O_{i0})$, ou bien O_i est défini par une définition non-floue $D_i(o, O_{i(1)}, \dots, O_{i(n(i))})$ avec $i(1), \dots, i(n(i))$ sont parmi $1, \dots, i-1$, et dans ce cas, à cause de la définition d'un concept non-flou donnée dans la définition 2.11, $O_1, \dots, O_i$ peuvent représenter simultanément les objets $O_{10}, \dots, O_{i0}$, avec O_{i0} tel que $D_i(O_{i0}, O_{i(1)0}, \dots, O_{i(n(i))0})$ soit vraie. Et donc $(O_1, \dots, O_i)$ représente au moins une séquence $(O_{10}, \dots, O_{i0})$.

Donc $P(i)$ est vraie.

On a donc démontré par récurrence le résultat.

PROPOSITION 3.8 :

a) Des concepts non-flous pouvant être identifiés à des corps, à des espaces vectoriels de toute dimension existent.

b) On peut identifier C à un concept général non-flou.

Preuve :

a) On a vu l'existence d'un concept non-flou pouvant être identifié à $\mathbf{Q}$, de même que des concepts non-flous pouvant être identifiés à la multiplication et à l'addition dans $\mathbf{Q}$, qu'on notera $\times$ et $+$.

Il en résulte que d'après la Proposition 3.6, il existe un concept non-flou $(\mathbf{Q}, +, \times)$, qui a les mêmes propriétés qu'un corps et donc qu'on peut identifier à un corps dans sa définition classique.

De même, utilisant la multiplication et l'addition dans $\mathbf{Q}$, on peut obtenir l'existence de concepts non-flous identifiés à la multiplication et l'addition dans $\mathbf{R}$. notées $+_{\mathbf{R}}$ et $\times_{\mathbf{R}}$. On peut ensuite obtenir l'existence de concepts non-flous identifiés à l'addition dans $\mathbf{R}^n$, identifié à $F(\{1, \dots, n\}, \mathbf{R})$, notée $+_{\mathbf{R}^n}$ et à la multiplication par un scalaire, notée $\cdot_{\mathbf{R}, \mathbf{R}^n}$, application de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$.

Alors d'après la proposition 3.6, il existe un concept non-flou $(\mathbf{R}^n, +_{\mathbf{R}^n}, \cdot_{\mathbf{R}, \mathbf{R}^n})$, qui a exactement les propriétés classiques d'un espace vectoriel de dimension n .

Remplaçant $\mathbf{R}^n$ par $F(\mathbf{N}, \mathbf{R})$, on obtient l'existence d'un concept non-flou ayant les propriétés d'un espace vectoriel de dimension infinie.

En procédant comme précédemment, on peut montrer théoriquement l'existence dans l'EMP d'objets mathématiques correspondant à la définition de n'importe quel concept mathématique classique. On notera que dans la phrase précédente, «un concept» est alors en accord avec la définition de «un concept» dans la TMP, puisqu'ils représentent au moins un objet mathématique.

Cependant, on n'a pas exposé comment montrer qu'«un espace vectoriel» ou qu'«un corps», ou qu'un concept mathématique utilisé dans les mathématiques classiques pouvaient être identifiés à des concepts non-flous. C'est ce que nous ferons dans le 2^{ième} article ⁽⁷⁾.

b) On identifie C au concept général R^2 défini précédemment. On identifie l'addition dans C , notée $+_C$ avec le concept général $+_{R^2}$ défini précédemment. A l'aide du concept général $\times_R$ défini précédemment, on identifie la multiplication dans C avec un concept général non-flou $\times_C$ représentant un unique objet (application de $C \times C$ dans C).

REMARQUE 3.9 :

a) On peut montrer (par une double récurrence analogue à celle utilisée pour justifier la Proposition 3.7) que si $O_1, \dots, O_n$ sont des concepts non-flous définis tels que dans la TMP, et si $O_{10}, \dots, O_{n0}$ sont des objets quelconques, alors ou bien $O_1, \dots, O_n$ peut représenter simultanément $O_{10}, \dots, O_{n0}$, ou bien $O_1, \dots, O_n$ ne peut représenter simultanément $O_{10}, \dots, O_{n0}$, et on ne peut avoir à la fois $O_1, \dots, O_n$ peut représenter simultanément $O_{10}, \dots, O_{n0}$ et $O_1, \dots, O_n$ ne peut représenter simultanément $O_{10}, \dots, O_{n0}$.

b). Il est utile et simplificateur d'admettre dans la TMP l'Axiome que si P et Q sont 2 propositions équivalentes (au sens « s'entraînent mutuellement »), alors $\text{Non}P$ et $\text{Non}Q$ s'entraînent mutuellement.

4. CONCLUSION

Nous avons dans cet article exposé les bases d'une Théorie Mathématique Platoniste (TMP). On a donné les méthodes permettant de justifier théoriquement que les concepts mathématiques classiques peuvent être identifiés à des objets mathématiques existant dans l'Espace Mathématique Platonique. On a donc justifié théoriquement l'existence Platoniste de ces concepts mathématiques classiques. Il est remarquable qu'on obtient l'existence de ces concepts mathématiques classiques à partir de l'ensemble vide. La TMP des ensembles apparaît consistante en évitant les Paradoxes de Cantor et de Russel grâce à l'Axiome 2.14e). On a introduit le concept fondamental de définition non-floue, et admis l'Axiome 2.5 permettant d'obtenir qu'une définition est non-floue. Nous donnerons les méthodes permettant de trouver les relations entre des objets mathématiques vraies équivalentes à une proposition vraie dans un second article, et aussi celles permettant de définir tous les concepts généraux utilisés en mathématique.

Nous verrons dans ce second article que la TMP donne donc une signification théorique Platoniste à l'ensemble des mathématiques classiques. Nous verrons qu'on peut établir une Logique Platonicienne des propositions à l'intérieur de la TMP. Cette TMP est complètement nouvelle puisque bien qu'il existe beaucoup de théories philosophiques sur le Platonisme (voir les Références) et que la plupart des mathématiciens ont l'idée d'une signification Platoniste des mathématiques, une Théorie mathématique Platoniste et consistante s'appliquant à l'ensemble des mathématiques n'a jamais été proposée.

References

1. Nagel, Newman, Godel, Girard: Le théorème de Godel, Seuil, Paris 1992
2. E.J. Borowski, J.M Borwein, Mathematics, Collins Dictionary (G.B, 1989)
3. E. Giusti, La naissance des objets mathématiques, Ellipses, (Paris, 2000)
4. Largeault, Logique Mathématiques, Armand Colin, (Paris, 1992)
5. P. Thiry, Notions de logique, Deboeck Université, (Bruxelles, 1998)
6. Jennifer Bothamley, Dictionary of Theories, (visible ink press, 2002)
7. Thierry Delort, Théories d'or 8e édition, Editions Books on Demand, Paris (2015).